<u>SINUS-Transfer: Erläuterung zu Modul 10</u>

Verstehensorientierte Aufgaben als Kern einer neuen Kultur der Leistungsüberprüfung

Andreas Büchter

Die Programme SINUS und SINUS-Transfer legen mit den Modulen 1-9 den Schwerpunkt auf die Erarbeitung und Erprobung von Ideen und Konzepten zur Verbesserung des *Mathematiklernens* – oder wie man in der aktuellen Terminologie auch sagt: des *Kompetenzerwerbs* im Fach Mathematik. Für diese Schwerpunktsetzung gibt es einen guten Grund, denn es kann als zentrale Funktion der Schule aufgefasst werden, dass Heranwachsende für eine vollwertige Teilhabe am gesellschaftlichen Leben qualifiziert werden, also unter anderem die entsprechenden fachlichen und sozialen Kompetenzen erwerben. Da Lernen der eigentliche Zweck der Schule, vor allem des Fachunterrichts, ist, lässt sich die Konzeption, Erprobung und Implementierung produktiver Lernumgebungen als Hauptanliegen der Unterrichtsentwicklung und der (Mathematik-)Didaktik auffassen (vgl. WITTMANN 1982, 1992).

Neben der oben skizzierten *Qualifikationsfunktion* erfüllt die Schule in allen modernen Gesellschaften aber auch eine *Selektionsfunktion* (vgl. FEND 1980, S. 29): Schülerinnen und Schüler werden bewertet, Abschlüsse werden vergeben und die Fortsetzung der Bildungslaufbahn bzw. Arbeitsmarktchancen nach der Vollzeitschulpflicht hängen von diesen Noten und Abschlüssen ab. Die Erfassung und Bewertung von Schülerleistung ist integraler Bestandteil von Schule und hier vor allem des Fachunterrichts. In Zeiten von Standardsetzung sowie zentralen Vergleichsarbeiten und Prüfungen ist es zur Binsenweisheit geworden, dass Leistungsüberprüfungen stark normierend auf das Lernen wirken (vgl. DAVIER & HANSEN 1998).

Eine Unterrichtsentwicklung, die primär *Kompetenzerwerb* im Blick hat, muss daher auch die Formen der *Leistungsüberprüfung* mit berücksichtigen und weiterentwickeln. Dabei geht es vor allem um die Praxis der Leistungsüberprüfungen im Rahmen des Unterrichts, die von den Lehrerinnen und Lehrern vor Ort, z. B. in Klassenarbeiten, gestaltet wird. *Zentrale Vergleichsarbeiten* und *Prüfungen* sollten aber aufgrund ihrer Rückwirkungen auf die *Klassenarbeitspraxis* und, hierdurch vermittelt, auf den Unterricht ebenfalls berücksichtigt werden.

In diesem Beitrag werden die folgenden Fragen anhand von Aufgabenbeispielen erörtert und konkrete Hinweise für die Gestaltung von Leistungsüberprüfungen gegeben:

- Was unterscheidet die Perspektiven „Lernen“ und „Leisten“ voneinander?
- Welche Wechselwirkungen von Lernen und Leisten gibt es?
- Wie sehen Aufgaben zum Leisten aus, die die Unterrichtsentwicklung unterstützen?
- Wie lassen sich gute Aufgaben zur Leistungsüberprüfung konstruieren?
- Wie lässt sich eine Leistungsüberprüfung zu mehr als nur zur Bewertung nutzen?
- Welche Formen der Leistungsüberprüfung gibt es jenseits der Klassenarbeit?

1 Was unterscheidet das Leisten vom Lernen?

Im Gutachten zur Vorbereitung des Programms SINUS, dessen Bestandaufnahme und Empfehlungen unverändert gültig sind, wird unter anderem empfohlen, dass Phasen des *Lernens* und Phasen des *Leistens* im Unterricht aufgrund ihrer unterschiedlichen Funktionalität deutlich voneinander unterschieden werden sollen (BLK 1997, Kapitel 3.6):

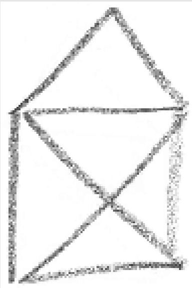
> *„Lernsituationen unterscheiden sich deutlich von Leistungssituationen. Während für gelingende Lernprozesse ein explorativer Umgang mit eigenen Fehlern charakteristisch ist, versucht man in Leistungssituationen einem subjektiv anerkannten Gütemaßstab zu genügen und Fehler nach Möglichkeit zu vermeiden. In Lernsituationen werden Fehler als Grenzerfahrung und Herausforderung gleichzeitig erlebt, in Leistungssituationen sind sie persönliches Versagen. […] Lernen und Leisten, Erprobung und Bewährung sind gleichermaßen für die moderne Schule charakteristisch; beides hat in ihr seinen spezifischen Platz. Der Expertengruppe liegt jedoch daran, die unterschiedliche und nicht-kompatible Logik von Lern- und Leistungssituationen zu betonen und auf die Problematik ihrer dauerhaften Vermischung aufmerksam zu machen.“*

Diese Gegenüberstellung von Lernen und Leisten im Mathematikunterricht lässt sich auf der Ebene von Aufgaben wie folgt gegenüberstellen (vgl. BÜCHTER & LEUDERS 2006):

Aufgaben für das Leisten	Aufgaben für das Lernen
Leistungserwartung/-erleben	Neugier, Entdecken
Fehler vermeiden	Fehler als Chance
Äußerer Anlass	Aufforderungscharakter
Einzelleistung & Auswertbarkeit	Kooperation & Kommunikation
Produktorientiert	Prozessorientiert
„Wichtig ist, was Schüler aus ihren Kompetenzen machen.“	„Wichtig ist, was im Kopf der Schüler stattfindet.“

Übersicht 1: Merkmale von „Aufgaben zum Lernen“ und „Aufgaben zum Leisten“

Was bedeutet dies für konkrete Aufgaben? Dies soll am Beispiel einer Lern- und einer Leistungsaufgabe aus dem Bereich „Diskrete Mathematik“ verdeutlicht werden. Dieser Inhaltsbereich eignet sich hervorragend, um Modellierungs- und Problemlösekompetenzen bei Schülerinnen und Schülern zu fördern (vgl. HUßMANN & LUTZ-WESTPHAL 2006). Angenommen, die Schülerinnen und Schüler haben im vorangehenden Unterricht bereits Grafen als universelle Modelle anhand geeigneter Alltagsprobleme entwickelt. Dann könnte eine innermathematische Fragestellung, bei der es um das Durchlaufen eines Grafen in einer bestimmten Weise geht und die auf das Konzept der „Eckengrade“ führen kann, wie folgt aussehen:



Wie viele unterschiedliche Möglichkeiten gibt es, „Das Haus vom Nikolaus" in einem Zug zu zeichnen? Findest du mehr als dein/e Nachbar/in? Vergleicht eure Möglichkeiten!

Welche Gemeinsamkeiten und Unterschiede gibt es bei den verschiedenen Varianten, das Haus in einem Zug zu zeichnen?
Stellt Vermutungen auf und versucht, diese zu begründen!

Versucht gemeinsam ein „Etwas anderes Haus vom Nikolaus" zu konstruieren (z. B. mit Anbauten), das man nicht in einem Zug zeichnen kann.

Beispiel 1: Das Haus vom Nikolaus – Eine Aufgabe zum Lernen

Bei dieser Aufgabe lassen sich viele Charakteristika von *Aufgaben zum Lernen* entdecken:

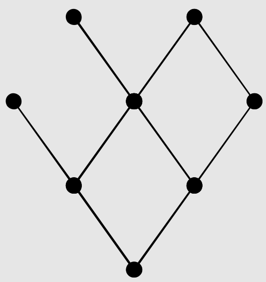
– Auch wenn es sich nicht um ein existenzielles Problem handelt, das mithilfe von Mathematik gelöst werden soll, hat diese Aufgabe sicher einen höheren *Aufforderungscharakter* als viele Aufgaben, die sonst im Mathematikunterricht gestellt werden.
– Dass ein vertrautes Problem, das für die Schülerinnen und Schüler bisher kaum Nähe zur Mathematik hatte, plötzlich im Mathematikunterricht auftaucht, reicht häufig schon aus, um *Neugier* zu wecken.
– Da wohl jeder die eine oder andere Möglichkeit, das Haus in einem Zug zu zeichnen, finden wird, haben alle Schülerinnen und Schüler Erfolgserlebnisse und können auf ihrem Niveau *Entdeckungen* machen und die Ergebnisse der anderen aufgrund dieser eigenen Erfahrungen besser nachvollziehen.
– „*Fehler*" treten hier höchstens als vorläufige „Irrwege" auf, z. B. beim systematischen Finden und Zählen der Möglichkeiten, und sind häufig *Anlass für neue Entdeckungen*.
– Die *Kooperation und Kommunikation* sind kein Selbstzweck, sondern dienen der Vergewisserung, ob möglicherweise alle Varianten gefunden wurden, ob die eigenen Ideen tragfähig sind und um in einem Brainstorming mehrere Vermutungen aufstellen zu können, von denen anschließend geeignete ausgewählt werden können.
– Was bei der Bearbeitung konkret zu Papier gebracht wird, variiert zwischen den Schülerinnen und Schülern erfahrungsgemäß stark. Der *Prozess* der Bearbeitung der Aufgabe ist hier *zunächst wichtiger als* ein vergleichbares oder auswertbares *Produkt*.[1]

Der konstruktive Auftrag am Ende der Aufgabe fordert das Konzept „Eckengrade" nahezu zwangsläufig ein, sodass bei aller Offenheit der Aufgabe eine Zielorientierung gegeben ist.

Weitere Merkmale von Aufgaben zum Lernen werden in der Erläuterung zum Modul 9 „Verantwortung für das eigene Lernen stärken" (LEUDERS 2006) und ausführlich in BÜCHTER & LEUDERS (2005a, Kap. 3 & 4) dargestellt.

[1] Dies soll nicht bedeuten, dass Produkte generell irrelevant für Lernprozesse sind. Gerade im Projektunterricht ist die Produktorientierung ein wichtiges Merkmal: Wenn vorzeigbare Produkte erarbeitet werden sollen, arbeiten viele Schülerinnen und Schüler ernsthafter. Aber auch am Ende einer Projektreihe ist der Prozess der Entstehung Produkts wichtiger als das Produkt selbst. Dies ist bei einer Prüfungsaufgabe anders. Dort zählt ausschließlich, was zu Papier gebracht wurde.

Wie könnte auf dem Gebiet der Grafentheorie und des Problemlösens eine *Aufgabe zum Leisten*, z. B. für eine Klassenarbeit nach einer entsprechenden Unterrichtsreihe, aussehen? Das Beispiel 2 kann als Pendant zum obigen Beispiel 1 aufgefasst werden. Die in der Übersicht 1 genannten Charakteristika von *Aufgaben zum Leisten* werden gerade in Abgrenzung zur obigen Lernaufgabe besonders deutlich und bedürfen kaum einer weiteren Erläuterung.



Der abgebildete Graf soll so verändert werden, dass man ihn anschließend so durchlaufen kann, dass

– jede Kante genau einmal genutzt wird,

– dabei jeder Knoten mehrfach genutzt werden darf und

– dabei Ausgangs- und Zielknoten identisch sind.

Du darfst zu diesem Zweck Ecken und/oder Kanten hinzufügen, aber keine entfernen. Verändere den Grafen wie gefordert und zeichne ein, wie man ihn durchlaufen kann.

Beispiel 2: „Schließe den Grafen" – Eine Aufgabe Leisten

Das Grundprinzip von *Aufgaben zum Leisten* ist, dass sie das nicht direkt beobachtbare Konstrukt „Kompetenz" sichtbar und damit erfahrbar und für eine Bewertung oder Diagnose zugänglich machen (vgl. BÜCHTER & LEUDERS 2005a, S. 165 f.). Aufgrund der gezeigten *Performanz* – in der Regel ist dies die schriftliche Bearbeitung –, werden Rückschlüsse auf die vorhandene *Kompetenz* von Schülerinnen und Schülern gezogen. Daher ist es besonders wichtig, dass bei *Aufgaben zum Leisten* die Bearbeitungszeit und der Umfang des sichtbaren Produkts in einem angemessenen Verhältnis stehen. *Aufgaben zum Leisten* in diesem Sinne sind Aufgaben

– zur Erfassung und Bewertung von Schülerleistung,
– zum Kompetenzerleben,
– zur Selbstüberprüfung und
– zur (kompetenzorientierten) Diagnose.

2 Zum Wechselspiel von Leisten und Lernen

Die Perspektiven „Lernen" und „Leisten" lassen sich zwar analytisch voneinander trennen – und im Unterricht sollen dem SINUS-Gutachten (BLK 1997) gemäß Phasen des Lernens auch real von solchen des Leistens getrennt werden – dennoch stehen Lernen und Leisten nicht unverbunden nebeneinander. Im Gegenteil: Es gibt vielfältige Wechselwirkungen zwischen Lernen und Leisten. Eine Aufgabe der Unterrichtsentwicklung ist es, diese Wechselwirkungen bewusst zu gestalten. Im Folgenden werden einige Wechselwirkungen skizziert.

Leisten als „Motor des Lernens"

Zunächst lässt sich feststellen, dass Lernen niemals Selbstzweck ist, sondern immer das Anwenden der erworbenen Kompetenzen zum Ziel hat. „Nicht für die Schule, sondern für das

Leben …“, mag man da schnell einwenden, warum sind also Leistungssituationen[2] in der Schule wichtig? Die Schule bietet in allen Bereichen einen Schonraum, der häufig wegen der mangelnden Authentizität von Lernsituationen kritisiert wird, der zugleich aber auch konstitutiv für Schule ist. Dieser Schonraum bietet immerhin die Möglichkeit, dass Fehler keine schwerwiegenden Konsequenzen haben, wie dies später z. B. im Berufsalltag der Fall sein kann. Innerhalb dieses Schonraums können Leistungssituationen die Funktion eines „Motors für das Lernen“ (vgl. BONSEN, BÜCHTER & VAN OPHUYSEN 2004) übernehmen. Zehn oder mehr Jahre zu lernen, ohne die erworbenen Kompetenzen anzuwenden, wäre sehr ermüdend. Wichtig ist dabei, dass Leisten und Lernen sinnvoll aufeinander bezogen sind und dass in Leistungssituationen sichtbar wird worin die Relevanz des Gelernten besteht.

„Teaching to the test“ als Gefahr

So gesehen haben Leistungssituationen eine wichtige Rolle für das Lernen, sie können aber auch schädlichen Einfluss auf Lernsituationen nehmen. Dann wird z. B. vor „teaching to the test“ gewarnt. Am Beispiel des (Mathematik-)Unterrichts in den USA lässt sich gut aufzeigen, wie eine bestimmte Art von zentralen Tests und Abschlussprüfungen zu einer Verengung des Unterrichts auf trainierbare (und leicht überprüfbare) Fertigkeiten führen kann (vgl. BONSEN & VON DER GATHEN 2004). Nicht selten findet Unterricht dann mithilfe von Prüfungsaufgaben statt. Hier fällt die wichtige Unterscheidung zwischen Aufgaben, mit denen Kompetenzen besonders gut erworben werden können, und Aufgaben, mit denen diese Kompetenzen besonders gut überprüft werden können, schnell unter den Tisch (vgl. BÜCHTER & LEUDERS 2005b). Dass sich diese Unterscheidung bei konkreten Aufgaben häufig erheblich auswirkt, verdeutlichen die obigen Beispielaufgaben 1 und 2.

Rückwirkungen von Leistungssituationen auf den Unterricht nutzen

Wenn zentrale Instrumente zur Leistungsüberprüfung immer Rückwirkungen („wash-back-Effekte“) auf Lernsituationen haben, dann können sie auch für Zwecke der Unterrichtsentwicklung genutzt werden, statt sie nur zu beklagen (vgl. BÜCHTER & LEUDERS 2005c). Zentrale Leistungsüberprüfungen müssen in diesem Sinne vor allem verstehensorientierte Aufgaben (s. u.) beinhalten. Für den Mathematikunterricht vor Ort und die Klassenarbeiten heißt dies, dass ebenfalls entsprechende Aufgaben gestellt werden müssen und dass die Lehrerinnen und Lehrer gezielt Einfluss auf die Vorbereitung der Schülerinnen und Schüler nehmen sollten. Immerhin wird ein enormer Anteil der Lernzeit für die Vorbereitung auf Tests und Klassenarbeiten verwendet. Mit den Schülerinnen und Schülern kann z. B. diskutiert werden, welche Aufgaben in einer Klassenarbeit gestellt werden könnten und wie eine sinnvolle Vorbereitung hierauf aussieht. In diesem Zusammenhang können sie auch eigene Aufgaben stellen, die sie für gute Klassenarbeitsaufgaben halten. Dabei findet häufig eine intensivere Auseinandersetzung mit den Unterrichtsinhalten statt als beim „gewöhnlichen“ Üben.

[2] Mit „Leistungssituationen“ sind hier nicht ausschließlich die schultypischen Situationen gemeint, in denen Schülerinnen und Schüler benotet werden, sondern auch z. B. solche, in den denen sie bei der erfolgreichen Bearbeitung von Anwendungsaufgaben ihre eigenen Kompetenzen erleben können.

3 Unterstützung von Unterrichtsentwicklung: Verstehensorientierte Aufgaben

Aktuelle Ansätze zur Verbesserung des Mathematikunterrichts, wie die in SINUS-Transfer entwickelten, zeichnen sich durch einige Gemeinsamkeiten aus. Dabei werden insbesondere die typischen Merkmale des deutschen Mathematikunterrichts berücksichtigt, die in Vergleichsuntersuchungen wie TIMSS oder PISA empirisch festgestellt wurden:

– Vor allem in den Sekundarstufen wird versucht, die *Kalkülorientierung* des Mathematikunterrichts zu überwinden (vgl. BLK 1997, Kapitel 5.1; BMBF 2001, 72). Dabei geht es nicht darum, den Kalkül als solchen zu diskreditieren – im Sinne von Verfahren, die geeignet sind, eine bestimmte Art von Problemstellungen stets zu lösen, ist der Kalkül auch Ausdruck der Stärke und der Besonderheit der Mathematik. Das Lernen von Mathematik muss aber mehr sein, als das Rezipieren fertiger Mathematik und Trainieren fertiger Verfahren. Es geht vielmehr um die *individuelle Konstruktion* tragfähiger Vorstellungen und Begriffe im Sinne fachlicher konsolidierter *Grundvorstellungen* (vgl. VOM HOFE 2003).
– Die konstruktiven Vorschläge zur Unterrichtsgestaltung basieren derzeit auf einem breiten fachdidaktischen Konsens, dessen Kern von einem Konzept „mathematischer Grundbildung“ steht. Dieses Konzept ist wesentlich geprägt durch FREUDENTHALS „Realistic Mathematics Education“ (vgl. VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN & WIJERS 2005) und WINTERS „Grunderfahrungen“ (vgl. WINTER 1995). Dabei stehen jeweils die *Eigenaktivität* und die *Primärerfahrungen* der Lernenden im Vordergrund.
– Diesen Konzepten liegt ein Bild von Mathematik als *Prozess* und nicht als *Produkt* zugrunde. Mathematik ist in dieser Auffassung nicht ein festes Gefüge von Definitionen und Sätzen, sondern eine individuelle *und* kommunikative Tätigkeit, bei der außer- oder innermathematische Probleme durch Mathematik treiben gelöst werden. Das Lernen von Mathematik wird dabei als selbstständiges Mathematisieren verstanden werden, also als Konstruktion eigener mathematischer Vorstellungen und Begriffe (s. o.).

Wenn im Unterricht der Aufbau tragfähiger individueller Vorstellungen und Begriffe künftig das Trainieren – oder despektierlich formuliert: Einschleifen – fertiger Verfahren ablösen soll, dann muss dies auch bei Leistungsüberprüfungen honoriert werden. Das verständige Anwenden dieser tragfähigen Vorstellungen und Begriffe drängt das sichere Anwenden der Verfahren in den Hintergrund.

Dieser Perspektivenwechsel von „verfahrensorientierten“ zu „verstehensorientierten“ Aufgaben wird anhand der folgenden Beispiele, die aus der Arithmetik/Algebra stammen, erläutert:

Lösen Sie das Gleichungssystem:

$$3\cdot(x-2\cdot y)-2\cdot(y-x)=14$$
$$8\cdot(x-y)-2\cdot x=16$$

Beispiel 3: Prüfungsaufgabe „Lineares Gleichungssystem I“

Die Aufgabe in Beispiel 3 ist ein – zumindest in einigen Bundesländern – durchaus typischer Bestandteil von zentralen Prüfungen am Ende der Sekundarstufe I. Mit ihr wird überprüft, ob Schülerinnen und Schüler das Verfahren „Lösen eines linearen Gleichungssystems“ auch dann beherrschen, wenn die Gleichungen durch einige Summanden und Klammersetzungen kompliziert gestaltet sind. Als Teil einer abschließenden Leistungsüberprüfung am Ende der Sekundarstufe I signalisiert eine solche Aufgabe, sei es gewollt oder ungewollt, dass es sich hierbei um einen zentralen Teil der (Schul-)Mathematik handelt, wichtig genug, um darüber mit zu entscheiden, ob Schülerinnen und Schülern der Erwerb der notwendigen mathematischen Bildung für das spätere Leben bescheinigt werden soll.

Es ist natürlich nicht von Nachteil, solche Gleichungssysteme sicher lösen zu können, aber welche Kompetenzen, welche Vorstellungen, auch: welches Bild von Mathematik, sollen Schülerinnen und Schüler in ihr späteres Leben mitnehmen? Wenn schon die Beherrschung des Verfahrens „Lösen eines linearen Gleichungssystems“ überprüft werden soll, dann kann man diese Verfahrensbeherrschung auch schärfer in den Blick nehmen und sollte sie nicht noch mit einer Portion Termumformung überlagern:

Löse das Gleichungssystem:

$$2 \cdot y - 3 \cdot x = 14$$
$$4 \cdot y - 2 \cdot x = 16$$

Beispiel 4: Aufgabe „Lineares Gleichungssystem II“

Dass auch diese Aufgabe nicht zu den oben genannten Zielen des Mathematiklernens und der Unterrichtsentwicklung passt, kann man daran erkennen, dass es hinreichend viele Schülerinnen und Schüler gibt, die sie lösen – und die sogar auch die Aufgabe in Beispiel 3 lösen –, die zugleich aber nicht in der Lage sind, auch nur ein einzige sinnvolle außer- oder innermathematische Situation zu benennen, die durch dieses Gleichungssystem angemessen beschrieben wird. Genauso wenig ist es erforderlich, dass sie hiermit zusammenhängende, für die Mathematik typische Fragen angemessen beantworten können, z. B. „“Warum kann man ein solches Gleichungssystem immer lösen?“ oder „Wie viele Elemente kann die Lösungsmenge eines Gleichungssystems dieser Art prinzipiell haben?“ Wer den Bereich „Terme, Gleichungen und Gleichungssysteme“ in einer Leistungsüberprüfung in den Blick nehmen möchte und stärker das Verstehen als die Verfahrensbeherrschung erfassen möchte, kann – je nach konkretem Erkenntnisinteresse – z. B. eine der folgenden Aufgaben (Beispiele 5-9) stellen:

Beschreibe, wie du bei dem folgenden Gleichungssystem mit den Variablen x und y und irgendwelchen reellen Zahlen a, b, c, d, e und f stets die Lösungsmenge bestimmen kannst:

$$a \cdot y - b \cdot x = \mathrm{c}$$
$$d \cdot y - e \cdot x = \mathrm{f}$$

Beispiel 5: Aufgabe „Lineares Gleichungssystem III“

Die Aufgabe in Beispiel 5 fokussiert stärker auf den Aspekt, dass die Mathematik Verfahren zur Lösung bestimmter Problemstellungen hervorbringen kann. Im konkreten Fall soll ein solcher, stets erfolgreicher Algorithmus dargestellt werden. In Anbetracht der Tatsache, dass heutzutage viele schultaugliche Taschenrechner solche linearen Gleichungssysteme lösen können und auch in der Praxis kaum noch jemand die Lösung mit Papier und Bleistift angeht, hat das Verstehen, warum man mit einem Taschenrechner hier immer zu einer Lösung kommen kann, vermutlich einen größeren Bildungswert als die sichere händische Lösung. Allerdings ist diese Variante einer Aufgabe zu „Linearen Gleichungssystemen" alleine aufgrund der vielen verwendeten Parameter sicherlich auch schwieriger als die in Beispiel 4.

Wie viele Elemente kann die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems mit den Variablen x und y und irgendwelchen reellen Zahlen a, b, c, d, e und f haben?
Begründe deine Antwort!

$$a \cdot y - b \cdot x = \mathrm{c}$$
$$d \cdot y - e \cdot x = \mathrm{f}$$

Beispiel 6: Aufgabe „Lineares Gleichungssystem IV"

In dieser Variante der Aufgabe werden insbesondere verschiedene Begründungen mit unterschiedlichen Darstellungsarten ermöglicht. Die typische Vernetzung von Geometrie und Algebra kann genutzt werden, wenn anstelle der beiden Gleichungen die durch sie beschriebenen Geraden und ihre möglichen Lagebeziehungen betrachtet werden. Darüber hinaus wird ein für die Mathematik typisches Begründen eingefordert. Wenn diese konkrete Aufgabe nicht vielfach im Unterricht trainiert wurde, kann sie nicht mit dem viel zitierten „Schema F" gelöst werden.

Gib eine Situation an, die durch die folgende Gleichung angemessen beschrieben wird:

$$2 \cdot y - 3 \cdot x = 14$$

Beispiel 7: Aufgabe „Gleichung kontextualisieren"

Schon an den Beispielen 5 und 6 lässt sich erkennen, dass sich verstehensorientierte Aufgaben nur im Anschluss an einen entsprechenden Unterricht stellen lassen, da die Schülerinnen und Schüler sonst nicht über die notwenigen Vorstellungen und Kompetenzen verfügen. Andererseits können solche Aufgaben zur Leistungsüberprüfung den Unterricht vom Trainieren des Kalküls entlasten. Dabei geht es nicht um ein Zurückdrängen des Übens, insbesondere wenn es Entdeckungen ermöglicht, also produktiv ist, sondern nur um einen Verzicht auf den „Verfahrensdrill". Die Aufgabe in Beispiel 7 verlangt wiederum keine konkrete Rechnung, sondern soll überprüfen, ob die Schülerinnen und Schüler einen adäquaten Begriff von Variablen, Termen und Gleichungen entwickelt haben. Ist dies der Fall, so fällt es ihnen nicht schwer, eine geforderte Situation anzugeben.

Gib einen Term an, mit dem man den Preis einer beliebigen Pizza in der „Pizzeria Fantastico" bestimmen kann.

Pizzeria Fantastico

Die Geschmäcke sind unterschiedlich! Stellen Sie sich Ihre Pizza deshalb selbst zusammen:

Zahlen Sie 2,50 € für Boden, Tomatensauce und Käse (= Pizza Magherita) und 0,40 € für jede A-Zutat sowie 0,70 € für jede B-Zutat.

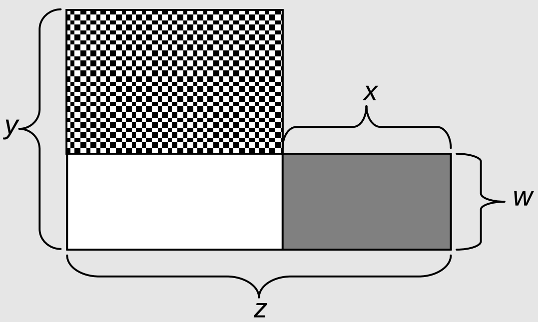
A-Zutaten		*B-Zutaten*
Ananas	*Peperoni*	*Artischocken*
Champignons	*Salami*	*Broccoli*
Ei	*Sardellen*	*Feta-Käse*
Kapern	*Schinken*	*Krabben*
Oliven	*Spinat*	*Meeresfrüchte*
Paprika	*Zwiebeln*	*Mozzarella*

Beispiel 8: Aufgabe „Term aufstellen"

In der Aufgabe in Beispiel 8 geht es darum, selbst einen Term aufzustellen. Auch diese Aufgabe kann, wie schon die Aufgaben in den Beispielen 4-7, ohne eine Rechnung erfolgreich bearbeitet werden. Dies ist keine notwendige Bedingung für verstehensorientierte Aufgaben, aber doch typisch für eine vollständig andere Schwerpunktsetzung gegenüber der Prüfungsaufgabe in Beispiel 3, bei der es *nur* um eine Rechung geht.

Auf dem Weg zu einer sinnvollen, verstehensorientierten Aufgabe kann auch ausgenutzt werden, dass Terme die Möglichkeit bieten, Zusammenhänge in anderen Inhaltsbereichen der Mathematik algebraisch zu beschreiben. Gerade in der „rechnenden Geometrie" wird intensiv mit fertigen Formeln gearbeitet. Möchte man weg von der rein verfahrensorientierten Nutzung der Formeln hin zu einer Überprüfung, ob die jeweilige Bedeutung angemessen erfasst wird, kann man z. B. die folgende Aufgabe stellen:

Bei der Figur sind einige Seitenlängen durch die Variablen w, x, y und z angegeben.



Erläutere, welche Umfänge oder Flächeninhalte man mit den folgenden Termen berechnen kann:

a) $2 \cdot w + 2 \cdot (z - x)$

b) $y \cdot z - x \cdot (y - w)$

Gib außerdem einen Term an, mit dem man den Flächeninhalt des karierten Rechtecks berechnen kann!

Beispiel 9: Aufgabe „Terme zur Flächen- und Umfangsberechnung"

Da nicht alle möglichen Maße an der Figur angegeben sind und die Figur aus mehreren Teilfiguren besteht, kommt es bei der Bearbeitung zunächst auf eine geeignete Zerlegung von Flächen und Seitenlängen an. Schließlich scheint es ohne tragfähigen Variablenbegriff kaum möglich zu sein, die Aufgaben angemessen zu bearbeiten. Und wieder kommt es nicht auf das Abspulen eines fertigen Verfahrens oder das Berechnen eines konkreten Ergebnisses an.

Natürlich sind verstehensorientierte Aufgaben zur Leistungsüberprüfung keine Besonderheit der Sekundarstufe I. Vielmehr lassen sich von der Grundschule bis zur Hochschule solche Aufgaben finden. Gerade in der Schule scheint die Kultur der Klassenarbeits- bzw. Klausuraufgaben aber mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler immer stärker den Kalkül zu betonen. Paradebeispiele hierfür lassen sich in der Sekundarstufe II finden: Die Kurvendiskussion nach „Schema F", die „Hieb- und Stichaufgaben" der analytischen Geometrie oder die schematisierten Hypothesentests. Daher schließt dieser Abschnitt mit zwei Beispielen für verstehensorientierte Aufgaben zur Leistungsüberprüfung in der Sekundarstufe II.

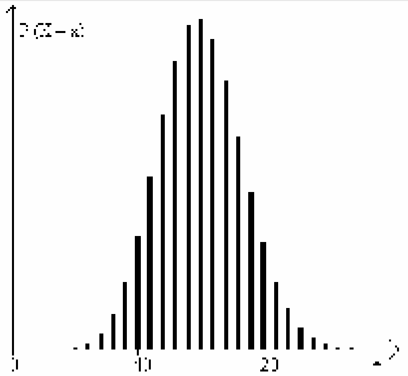
Gib den Term einer Funktion an, die

a) mindestens drei Hochpunkte und mindestens einen Wendpunkt hat,

b) genau zwei Hochpunkte und genau zwei Wendpunkte hat.

Beispiel 10: Aufgabe „Funktion gesucht"

Bei dieser Aufgabe geht es anders als bei der klassischen und zurecht viel gescholtenen Kurvendiskussionen nach „Schema F" nicht um die algebraische Bearbeitung eines Funktionsterms nach feststehenden – und häufig unverstandenen – Regeln, sondern um den inhaltlich verständigen Umgang mit den involvierten Begriffen und deren möglichen Bedeutungen. Natürlich lassen sich beide Teilaufgaben ähnlich zu den üblichen Steckbriefaufgaben lösen, bei denen für ganzrationale Funktionen vom Grad n genau n+1 Bedingungen mehr oder weniger explizit angegeben sind. Bei dieser Aufgabe wäre hiermit jedoch ein erheblicher rechnerischer Aufwand verbunden, zumal nicht klar ist, welchen Grad eine gesuchte Funktion haben müsste. Bei Teilaufgabe a) ist es viel einfacher, unter den bekannten Funktionen solche zu suchen, die mehrere Hochpunkte und Wendestellen haben, z. B. also eine Sinus- oder Cosinus-Funktion. Diese Lösung ist im Vergleich zur „Steckbrief-Lösung" sehr einfach, zeichnet sich aber dadurch aus, dass mit den involvierten Begriffen verständig umgegangen wird. In ähnlicher Weise können Schülerinnen und Schüler bei Teilaufgabe b), die aufgrund der präziseren Anforderungen vermutlich schwieriger und nicht „einfach" mit den trigonometrischen Funktionen lösbar ist, direkt auf eine ganzrationale Funktion vierten Grades schließen.



Die nebenstehende Abbildung zeigt das Säulendiagramm einer Binomialverteilung.

Geben Sie für die dargestellte Verteilung mögliche Werte für *n* und *p* an und begründen Sie Ihre Wahl.

Beispiel 11: Aufgabe „Parameter der Verteilung“

Diese Aufgabenstellung[3] erfordert den kompetenten und flexiblen Umgang mit Eigenschaften der Binomialverteilung. Neben dem Modalwert der Verteilung, der der beste ganzzahlige Näherungswert für das Produkt $n \cdot p$ ist, gibt die Streuung der Verteilung einen Hinweis auf den ungefähren Wert von p. Diese Aufgabe ist also nicht nur verstehensorientiert, sondern ermöglicht sowohl eine einfachere, als auch eine vertiefte erfolgreiche Bearbeitung, je nach dem ob auch die Streuung als Anhaltspunkt für die Wahl der Werte herangezogen wird.

Natürlich müssen Aufgaben zur Leistungsüberprüfung nicht nur verstehensorientiert sein. Im nächsten Abschnitt werden weitere wichtige Eigenschaften dargestellt, bevor im übernächsten Abschnitt konkrete Konstruktionsprinzipien erläutert werden, mit deren Hilfe sich verstehensorientierte Aufgaben für die Leistungsüberprüfung aus klassischen Schulbuchaufgaben „herstellen“ lassen.

4 Eigenschaften von guten Aufgaben zur Leistungsüberprüfung?

Wer die Qualität von Aufgaben systematisch beeinflussen möchte muss relevante Kriterien hierfür zur Verfügung haben. Solche Kriterien und Prinzipien zur kriterienbezogenen Veränderung von Aufgaben sind gewissermaßen „Werkzeuge“ des „Handwerks Aufgabenentwicklung“. Da sich in Schulbüchern, anderen Lehrwerken und im Internet scheinbar unendlich viele Aufgaben finden lassen, kommt es häufig sogar nur darauf an, Kriterien für die Auswahl von Aufgaben und ggf. deren gezielter Veränderung zu haben. Im Folgenden werden einige wichtige, pragmatisch ausgewählte Kriterien[4] für gute Aufgaben zur Leistungsüberprüfungen präsentiert.

Konzentration auf Kerne inhaltsbezogener Kompetenzen

Für einen kumulativen Kompetenzerwerb im Mathematikunterricht spielen – ganz im Sinne eines Spiralcurriculums – die Kerne der mathematischen Leitideen und der jeweiligen Themen eine besondere Rolle. Auf diesen bauen gerade im Fach Mathematik spätere Lernprozes-

[3] Die Idee für diese schöne Aufgabe habe ich erstmalig von GUIDO PINKERNELL, Lingen, gehört.

[4] Wie bei anderen Kriterienkatalogen, aber auch z. B. den Katalogen wichtiger mathematischer Kompetenzen, ist diese Auflistung nicht ohne Alternative. Es lassen sich ggf. mehr oder andere Kriterien finden, vielleicht auch einige zusammenfassen. Allerdings lässt sich die hier präsentierte Zusammenstellung (vermutlich) ebenso gut begründen wie alternative Zusammenstellungen.

se im Sinne individueller Begriffsbildung auf[5]. So müssen Lernende zwar z. B. einen tragfähigen Begriff von natürlichen Zahlen entwickelt haben, bevor sie sinnvoll anhand geeigneter Probleme an Zahlbereichserweiterungen herangeführt werden können. Sie müssen aber nicht alle möglichen (schul-)mathematischen Betrachtungen für natürliche Zahlen, wie z. B. die differenzierte Auseinandersetzung mit Teilbarkeitsregeln, durchgeführt haben. Das heißt nicht, dass auf die vertiefte Auseinandersetzung mit bestimmten Inhalten kein Raum im Mathematikunterricht sein soll, aber bei Leistungsüberprüfungen sollten vor allem die Kompetenzen erfasst werden, die für das nachhaltige fachliche Lernen besonders relevant sind. Im Rahmen einer Unterrichtsreihe zum *Satz des Thales* ist es z. B. durchaus sinnvoll den *Umfangswinkelsatz* als Verallgemeinerung zu thematisieren, in der anschließenden Klassenarbeit muss er sich aber nicht zwingend wieder finden.

Kompetenzen klar in den Blick nehmen und nicht durch andere Aspekte überlagern

Anhand der Beispiele 3 und 4 lässt sich gut verdeutlichen, was hiermit gemeint ist: Wer daran interessiert ist, ob seine Schülerinnen und Schüler lineare Gleichungssysteme lösen können, sollte wie in Beispiel 4 eine klare Aufgabe hierzu ohne die hohe zusätzliche rechnerische Komplexität in Beispiel 3 stellen. Für den Bereich der Bruchaddition lässt sich dieser Aspekt analog veranschaulichen:

12 a) Berechne das Ergebnis:	12 b) Berechne das Ergebnis:
$\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=$	$\frac{9}{14}+\frac{3}{22}=$

Beispiel 12: Aufgaben zur Bruchaddition

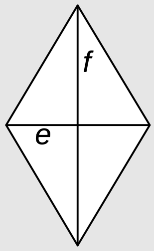
Die Aufgabe 12a) reicht für eine Überprüfung der prinzipiellen Beherrschung der Bruchaddition völlig aus. Hier können Schülerinnen und Schüler anhand einer sinnvoll verinnerlichten Rechenregel oder mit angemessenen grafischen Darstellungen von Brüchen zum richtigen Ergebnis kommen. Wer keine adäquate Vorstellung der Bruchaddition aufgebaut hat, wird nicht zufällig auf das richtige Ergebnis kommen. In der Aufgabe 12b) werden die Anforderungen der Bruchaddition zumindest teilweise durch komplizierte Zahlen und dadurch bedingte aufwändigere Rechnungen (Hauptnenner etc.) verdeckt. Die Aufgaben 12 a) und b) stellen somit eine Analogie zu den Beispielen 3 und 4 (Lineare Gleichungssysteme) dar.

Transparente Erwartungen an die Bearbeitung einer Aufgabe stellen

Die Transparenz der Erwartungen an die Bearbeitung einer Aufgabe ist eine Anforderung, die an jede Aufgabe zur Leistungsüberprüfung zu stellen ist. Gerade bei verstehensorientierten Aufgaben ist aber besonders darauf zu achten, dass die Schülerinnen und Schüler erkennen können, was von ihnen verlangt wird. Bei verfahrensorientierten Aufgaben ist diese Anforde-

[5] Dies entspricht im Übrigen der Entstehung von Mathematik, die sich auch als kollektive Begriffsbildung verstehen lässt. Bei der fortschreitenden Abstraktion werden zentrale mathematische Objekte Ausgangspunkt einer weiteren Mathematisierung.

rung häufig erfüllt, da ein bestimmter Rechenweg zu vollziehen ist, an dessen Ende ein eindeutiges Ergebnis steht.



Berechne den Flächeninhalt einer Raute mit den Diagonalen *e* und *f* für

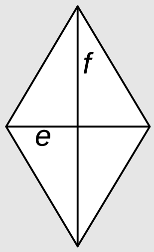
a) *e* = 4 cm ; *f* = 7 cm

b) *e* = 3 cm ; *f* = 4 cm

Beispiel 13: Aufgabe „Fläche einer Raute I“

Bei dieser Aufgabe ist für die Schülerinnen und Schüler klar erkennbar, wann die Aufgabe im Sinne der Aufgabenstellung vollständig bearbeitet ist. Es wird jeweils ein konkretes Ergebnis erwartet und – je nach Konvention für die Bearbeitung solcher Aufgaben, die meistens innerhalb einer Lerngruppe, bei zentralen Prüfungen auch innerhalb eines Bundeslands festgelegt wird – die Angabe der Rechnung, die zu diesem Ergebnis führt.

Ein Versuch, Beispiel 13 in eine verstehensorientierte Aufgabe abzuändern, könnte wie folgt aussehen:

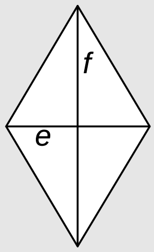


Erkläre, wie man den Flächeninhalt einer Raute mit den Diagonalen *e* und *f* berechnen kann, wenn *e* und *f* bekannt sind.

Beispiel 14: Aufgabe „Fläche einer Raute II“

Dieser Aufgabe wäre natürlich in bester Absicht gestellt: Schülerinnen und Schüler sollen nicht einfach vorgegebene Längen in eine Formel einsetzen und dann das Ergebnis berechnen, was im Zweifel *ohne* adäquate Vorstellung von der Berechtigung der Formel möglich ist, sondern den zugrunde liegenden Zusammenhang geometrisch-inhaltlich erläutern, was nur mit einer entsprechenden Vorstellung geht. Die Aufgabenstellung lässt allerdings nicht klar erkennen, ob die folgende Bearbeitung ausreicht: „Ich rechne *e* mal *f* durch 2.“ Vermutlich ist dies nicht mit der Aufgabenstellung intendiert, klar erkennbar ist die Intention aber nicht.

Deswegen muss man aber nicht auf die eigentliche Absicht, den geometrisch-inhaltlichen Kern der Flächenformel zu erfassen, verzichten. Eine eindeutigere Formulierung, die zu dieser Absicht passt, könnte wie folgt lauten:



Die abgebildete Raute hat die Diagonalen *e* und *f*.

Erkläre, warum man ihren Flächeninhalt mit der Formel $\frac{e \cdot f}{2}$ berechnen kann.

Beispiel 15: Aufgabe „Fläche einer Raute III“

Hier ist für die Schülerinnen und Schüler hinreichend klar erkennbar, dass sie das Zustandekommen der Formel erläutern sollen, schließlich ist diese bereits in der Aufgabenstellung vorgegeben, sodass ihr reines Zitieren nicht das Ziel der Bearbeitung sein kann.

(Möglichst) Bearbeitungen auf verschiedenen Niveaus zulassen

Bei der Zusammenstellung von Klassenarbeiten (und Leistungstests) wird immer darauf geachtet, dass sowohl leichte als auch schwierige Aufgaben vorkommen. Schließlich sollen die leistungsschwächeren Schülerinnen und Schüler auch einige Aufgaben bearbeiten können und die leistungsstärkeren ihr Potenzial an anderen Aufgaben nachweisen. Häufig werden dann zunächst die Aufgaben zuerst gestellt, von denen a priori vermutet wird, dass sie die leichteren sind. Die hehre Absicht dabei ist, dass man die leistungsschwächeren Schülerinnen und Schüler nicht schon zu Beginn der Arbeit entmutigen möchte. Trotzdem gibt es in der Progression der Aufgaben dann häufig eine Stelle, ab der viele von ihnen aufgeben.

Dies kann vermieden werden, wenn man Aufgaben findet, die auf verschiedenen Niveaus bearbeitet werden können. Schon in Beispiel 11 wurden mit der Frage nach den möglichen Parametern einer Binomialverteilung eine einfache und eine vertiefte Bearbeitung ermöglicht. Der Erwartungshorizont war trotzdem klar, da für diejenigen Schülerinnen und Schüler, die die Möglichkeit der vertieften Bearbeitung prinzipiell erkennen, diese vertiefte Bearbeitung zwangsläufig erscheint. Eine Aufgabe aus der Arithmetik, die auch argumentative Kompetenzen mit in den Blick nimmt lautet:

Finde möglichst viele verschiedene Möglichkeiten, einen Betrag von 18 Cent mit 1-, 2-, 5-, 10-Cent-Münzen zu bezahlen.

Wenn du dir sicher bist, alle Möglichkeiten gefunden zu haben, dann begründe, warum es keine weiteren geben kann!

Beispiel 16: Aufgabe „Geldbetrag zerlegen“

Bei dieser Aufgabe können auch leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler einige mögliche Kombination angeben, die die Anforderungen erfüllen. Andere Schülerinnen und Schüler werden möglicherweise alle Kombinationen finden, aber nicht erklären können, warum dies alle sind. Wieder andere können zusätzlich, z. B. durch eine systematische Auflistung erklären, warum sie alle Möglichkeiten angegeben haben. Bei der Bewertung der Aufgabe können diese verschiedenen Niveaus der Bearbeitung berücksichtigt werden und allen Schülerinnen und Schülern kann zumindest ein Teilerfolg bescheinigt werden.

Aufgaben, die diese Anforderung erfüllen, werden auch *natürlich differenzierend* oder *selbstdifferenzierend* genannt. Sie zu finden oder zu entwickeln ist nicht in allen Bereichen gleichermaßen einfach, aber es gibt einige geeignete Heuristiken hierfür (siehe BÜCHTER & LEUDERS 2005a, Kap. 3.3 und 5.3).

Stärker am Verstehen- als Verfahren orientieren

Die inhaltliche Bedeutung dieser Anforderungen an gute Aufgaben zur Leistungsüberprüfung ist bereits im vorangehenden Abschnitt 3 begründet und veranschaulicht worden. Im nächsten Abschnitt werden einige Prinzipien für die Konstruktion solcher Aufgaben angegeben.

5 Konstruktionsprinzipien für verstehensorientierte Aufgaben

Verstehensorientierte Aufgaben lassen sich mithilfe einiger Konstruktionsprinzipien gut aus vorliegenden Aufgaben entwickeln. Gerade wenn man von „klassischen Schulbuchaufgaben“[6] ausgeht, helfen die folgenden Prinzipien, die anhand von Beispielen erläutert werden, häufig weiter:

- Aufgaben (dosiert) öffnen, z. B. durch Umkehrung,
- Begründungen oder Gegenbeispiele einfordern, Statements begründet einschätzen lassen,
- Anwendungsbeispiele oder Grenzen eines Modells erfragen.

Da das *Öffnen von Aufgaben* das mächtigste Prinzip, man könnte auch sagen: die mächtigste Technik ist, wird hierauf im Folgenden am intensivsten eingegangen.

Aufgaben dosiert öffnen

Das Öffnen von Aufgaben ist seit einigen Jahren ein wichtiger Ansatz für die Weiterentwicklung der Aufgabenkultur im Mathematikunterricht. Daher gibt es mittlerweile zahlreiche theoretische und praktische Veröffentlichungen hierzu mit Hintergründen, Konstruktionsprinzipien und konkreten Beispielen (vgl. BRUDER 2000; HERGET 2000; BÜCHTER & LEUDERS 2005a, Kap. 3.2). Für Aufgaben zur Leistungsüberprüfung ist eine zu radikale Öffnung aber nicht praktikabel:

[6] Zur Ehrenrettung der Schulbücher für die Sekundarstufe I *muss* gesagt werden, dass viele Ausgaben, die in den letzten Jahren überarbeitet wurden, einen deutlichen Fortschritt gegenüber früheren Ausgaben darstellen. So lassen sich reichhaltige Lernumgebungen am Anfang von Themenbereichen finden, die Aufgaben und Übungsformate sind häufig produktiver geworden. Allerdings lassen sich auch immer noch unproduktive Übungswüsten mit grauen Päckchen finden. Hier ist ein intelligenter Umgang mit wenig intelligenten Übungspäckchen gefragt (vgl. BÜCHTER & LEUDERS 2005a, Kap. 4.3).

Stelle Fragen zum Thema „Fußball“, bei deren Beantwortung dir Mathematik helfen kann. Sammle ein paar Fragen und bearbeite sie.

Beispiel 17: Offene Aufgabe zum Lernen

Diese Aufgabe kann zwar sehr gut für den Unterricht geeignet sein, gerade wenn es um das Verhältnis von Mathematik und dem „Rest der Welt“ geht, für eine Klassenarbeit ist sie aber so offen, dass sie kaum auswertbar erscheint. Ein einfaches Konstruktionsprinzip zur dosierten Öffnung von Aufgaben ist die *Umkehrung geschlossener Aufgaben*:

Die Grundseite eines Parallelogramms hat die Länge 8 cm, seine Höhe ist 3,5 cm lang. Zeichne ein solches Parallelogramm und berechne seinen Flächeninhalt!

Beispiel 18: Geschlossene Aufgabe „Parallelogramm“

Diese Schulbuchaufgabe lässt sich schematisch bearbeiten. Das ***Öffnen durch Zielumkehr*** lässt sich allerdings ebenso schematisch durchführen. Darin liegt der Reiz dieser Technik, die sich auf die folgende Formel bringen lässt: ***„Nimm das Ergebnis einer geschlossenen Aufgabe und frage nach möglichen Ausgangswerten.“***

Zeichne ein Parallelogramm mit einem Flächeninhalt von 24 cm^2.

Beispiel 19: Durch Zielumkehr geöffnete Aufgabe „Parallelogramm“

Durch die Umkehrung kann das Ziel dieser geöffneten Aufgabe nicht einfach durch Einsetzen von Werten in eine Formel erreicht werden. Die Formel zur Berechnung des Flächeninhalts wird zwar benötigt, aber zuvor muss der Schüler oder die Schülerin eine Länge selbst festlegen und dann flexibel mit dieser Formel umgehen. Zugleich ist die Erwartung an eine vollständige Bearbeitung der Aufgabe sehr transparent und ein Ergebnis gut überprüfbar. Die Lösung der Aufgabe mithilfe eines Rechtecks, das die Anforderungen erfüllt, ist übrigens keine Trivialisierung, die nicht so honoriert werden kann, wie eine Lösung mit einem „echten“ Parallelogramm. Vielmehr gelingt es in der Regel nur Schülerinnen und Schülern, die sehr sicher mit den verschiedenen Vierecken arbeiten können, diese „einfache“ Lösung anzugeben. Allein durch die Wahl des Rechtecks haben diese dann ein gut ausgeprägtes Verständnis angewendet.

Am Beispiel 19 lässt sich übrigens gut erkennen, dass sich Aufgaben, die durch Zielumkehr geöffnet wurden, fast immer gut zum kooperativen Lernen in Tandems eignen: Dazu bearbeiten je zwei Schülerinnen oder Schüler zunächst die geöffnete Aufgabe und überprüfen hinterher, ob die Bearbeitung des/der anderen richtig ist. Dabei werden auch leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler sinnvoll eingebunden. Denn selbst, wenn sie die Umkehraufgabe nicht erfolgreich bearbeiten konnten, können sie die Lösung ihres Partners/ihrer Partnerin überprüfen und dabei zumindest den Flächeninhalt eines gegebenen Parallelogramms bestimmen, also diesen Aspekt üben.[7]

Wenn man einmal anfängt geschlossene Aufgaben durch Umkehrung zu öffnen, drängen sich fast von selbst Variationen auf:

> Zeichne zwei unterschiedliche Parallelogramme, die jeweils einen Flächeninhalt von 24 cm^2 haben.

Beispiel 20: Variation I der geöffneten Aufgabe „Parallelogramm“

Diese Aufgabe lässt sich vor allem auf zwei Wegen erfolgreich bearbeiten: Die Schülerinnen und Schüler können bei gleicher Grundseite und gleicher Höhe nicht deckungsgleiche Parallelogramme mit gleichem Flächeninhalt durch Scherung erzeugen. Sie können aber natürlich auch zwei unterschiedliche Kombinationen für Längen von Grundseite und Höhe bestimmen. Gegenüber der Aufgabe in Beispiel 19 ist z. B. eine entsprechende Vorstellung über flächengleiche Parallelogramme zusätzlich für die Bearbeitung erforderlich.

> Gib zwei unterschiedliche Kombinationen möglicher Längen für Grundseite und Höhe eines Parallelogramms an, das einen Flächeninhalt von 24 cm^2 hat.

Beispiel 21: Variation II der geöffneten Aufgabe „Parallelogramm“

Bei dieser zweiten Variation der geöffneten Parallelogramm-Aufgabe, wird die Bestimmung von zwei unterschiedlichen Kombinationen für Längen von Grundseite und Höhe zielgerichtet eingefordert, die Aufgabe aus Beispiel 20 wird also auf eine rechnerische Lösungsvariante fokussiert. Da es möglicherweise mehr als zwei solcher Kombinationen geben kann, und 24 eine Zahl mit vielen ganzzahligen Teilern ist, lässt sich in einer weitere Variante eine Vernetzung mit der Arithmetik herstellen:

> Gib möglichst viele unterschiedliche Kombinationen für die Länge der Grundseite und der Höhe eines Parallelogramms mit einem Flächeninhalt von 24 cm^2 an. Wähle nur ganzzahlige Werte für die Länge und die Höhe.
>
> Wenn du dir sicher bist, alle Möglichkeiten gefunden zu haben, dann begründe, warum es keine weiteren geben kann!

Beispiel 22: Variation III der geöffneten Aufgabe „Parallelogramm“

Die Analogie zur Aufgabe 16 ist augenscheinlich. Durch diese Variation erhält man also eine selbstdifferenzierende Aufgabe, wenn auch auf hohem Niveau. Anstelle der Grundseite und der Höhe kann man aber auch den Umfang des Parallelogramms mit in den Blick nehmen und gelangt so zu einer anspruchsvollen verstehensorientierten Aufgabe.

---

[7] Auf diese effektive und dabei verblüffend einfache Umsetzung kooperativen Lernens hat mich ULI BRAUNER, Gladbeck, aufmerksam gemacht. Er praktiziert es selbst seit vielen Jahren erfolgreich in seinem Unterricht.

> Ein Parallelogramm hat einen Flächeninhalt von 24 cm^2. Was kannst du über seinen Umfang aussagen?

Beispiel 23: Variation IV der geöffneten Aufgabe „Parallelogramm“

Aufgrund der möglichen Scherungen kann der Umfang zwar beliebig groß werden, wenn man aber die Flächen-Umfangs-Optimalität des Quadrats berücksichtig, kann man aussagen, dass kein kleinerer Umfang als $4 \cdot \sqrt{24}\,cm$ möglich ist.

Diese Öffnung von Aufgaben durch Zielumkehr ist keine Spezialität geometrischer Fragestellungen. Zur Verdeutlichung werden einige Beispiele aus der beschreibenden Statistik kommentarlos dargestellt:

> Frank arbeitet neben seinem Studium montags bis freitags als Kellner. An seinen Arbeitstagen der vergangenen Woche hat er 24 €, 27 €, 28 €, 19 € und 27 € Trinkgeld bekommen.
>
> Bestimme das arithmetische Mittel und den Median dieser fünf Werte.

Beispiel 24: Geschlossene Aufgabe „Mittelwerte“

> Frank arbeitet neben seinem Studium montags bis freitags als Kellner. An seinen Arbeitstagen der vergangenen Woche hat er 24 €, 27 €, 28 €, 19 € und 27 € Trinkgeld bekommen. Im Durchschnitt (arithmetische Mittel) sind dies 25 €.
>
> Verändere einen der Geldbeträge so, dass das arithmetische Mittel 26 € beträgt.

Beispiel 25: Geöffnete Aufgabe I „Mittelwerte“[8]

> Gib eine Datenreihe mit fünf Geldbeträgen an, deren Median 27 € und deren arithmetisches Mittel 25 € ist.

Beispiel 26: Geöffnete Aufgabe II „Mittelwerte“

Begründungen oder Gegenbeispiele einfordern, Statements einschätzen lassen

Wenn man verstehensorientiert Leistung überprüfen möchte, so bietet es sich auch an, Begründungen oder Gegenbeispiele zu bestimmten Aussagen einzufordern oder vorgegebene Statements begründet einschätzen zu lassen. Allerdings sind dann für die Bearbeitung der Aufgabe schnell größere verbale Darstellungsleistungen erforderlich:

[8] Auch diese Aufgabe eignet sich – wie schon die in Beispiel 19 (siehe die dortigen Ausführungen) - hervorragend zum kooperativen Lernen in Tandems.

α, β und γ bezeichnen die Innenwinkel in einem Dreieck.

Beurteile jeweils, ob die folgenden Aussagen zutreffen können und begründe deine Einschätzung:

a) „Die Summe $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$ kann größer als 3 sein."

b) „Die Summe $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$ kann gleich 0 sein."

c) „Das Produkt $\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$ ist immer größer als 0."

Beispiel 27: Aufgabe „Aussagen zum Sinus im Dreieck"

Mit „Schema F" lässt sich diese Aufgabe nicht bearbeiten. Allerdings können Schülerinnen und Schüler, die über adäquate Vorstellungen von Dreiecken und der Sinus-Funktion verfügen, sie ohne großen Aufwand erfolgreich bearbeiten. Hingegen werden Schülerinnen und Schüler, die keine adäquaten Vorstellungen ausgebildet haben, kaum zu einer angemessenen Lösung gelangen. Die Aufgabe unterscheidet also trennscharf zwischen diesen beiden Gruppen. Diese Eigenschaft der Aufgabe kann aber auch als Nachteil angesehen werden: Sie ist nicht selbstdifferenzierend.

Anwendungsbeispiele oder Grenzen eines Modells erfragen

Als letztes Prinzip oder letzte Technik zur Entwicklung verstehensorientierter Aufgaben wird hier auf den Bereich der mathematischen Modelle zurückgegriffen. Die Mathematik hält viele universelle Modelle zur Beschreibung von Phänomenen bereit. *Das* dominante der Sekundarstufe I ist häufig die Linearität. Ein wichtiges Ziel des Mathematikunterrichts ist der kompetente Umgang mit solchen Modellen, insbesondere auch das Erkennen der Grenzen solcher Modelle. Damit lassen sich direkt verstehensorientierte Aufgaben konstruieren:

Gib jeweils einen Wachstumsprozess an, der sich besonders gut durch eine

a) Exponentialfunktion

b) quadratische Funktion

c) lineare Funktion

beschreiben lässt.

Beispiel 28: Aufgabe „Beispiele für Wachstumsmodelle"

Mit dieser Aufgabe kann einfach überprüft werden, ob Schülerinnen und Schüler über paradigmatische Beispiele zu den verschiedenen Wachstumsmodellen verfügen. Das hier nicht gerechnet werden muss ist typisch für diese Art der Aufgabe. Wer allerdings die Realisierung konkreter Werte in den Blick nehmen möchte kann auch Funktionsterme vorgeben und hierzu Beispiele einfordern:

> Gib jeweils einen Wachstumsprozess an, der sich besonders gut durch die Funktion
>
> a) $f(x) = 4\cdot 2^x$
>
> b) $g(x) = 0{,}2\cdot x^2$
>
> c) $h(x) = 0{,}19\cdot x$
>
> beschreiben lässt.

Beispiel 29: Aufgabe „Beispiele für Wachstumsfunktionen“

Wenn auf die Qualität der Beispiele – z. B. im Sinne der inhaltlichen Angemessenheit und des Realitätsgehalts – geachtet wird, steigt durch diese Konkretisierung allerdings auch das Anforderungsniveau erheblich.

Da die Kenntnis der Grenzen von Modellen mindestens so wichtig ist für den kompetenten Umgang mit Modellen wie Beispiele für die Realisierung bestimmter Modelle – schließlich ist nicht die ganze Welt linear, auch wenn es in einigen Phasen einer Lernbiografie so erscheinen mag – sollten z. B. auch andere Wachstumsprozesse explizit Thema des Unterrichts und auch der Leistungsüberprüfung sein:

> „Gib einen Wachstumsprozess an, der sich weder durch eine Exponentialfunktion, noch durch eine quadratische Funktion, noch durch eine lineare Funktion angemessen beschreiben lässt.

Beispiel 30: Aufgabe „Grenzen von Modellen“

6 Ausblicke: Leistungsüberprüfungen als Ausgangspunkt für künftige Lernprozesse und alternative Formen der Leistungsüberprüfung

Der Schwerpunkt dieser Modulerläuterung liegt auf einer veränderten Aufgabenkultur für die in der Schule notwendigen Leistungsüberprüfungen, wobei hier bisher überwiegend auf das praktisch bedeutsamste Format „Klassenarbeit“ geblickt wurde. Dabei stand im Wesentlichen der Aspekt des Erfassens und Bewertens relevanter Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler im Vordergrund. Leistungsüberprüfungen können aber vielfältiger sein, sekundäre Funktionen erfüllen und durch einen breiteren Blick auf Leistung die Unterrichtsentwicklung im Fach Mathematik noch stärker unterstützen. Anhand von drei Konzepten wird dies in einem abschließenden Ausblick exemplarisch dargestellt.

Leistungsüberprüfungen als Planungsgrundlage für individuelle Förderung

Sollen Lernsituationen produktiv sein, dann müssen sie für Schülerinnen und Schüler auf der einen Seite herausfordernd, auf der anderen aber zugleich auch zugänglich sein. Für die Planung von Unterricht bedeutet dies, dass Lehrerinnen und Lehrer in der Lage sein müssen, vorhandene Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler möglichst genau zu erfassen – oder wie man auch sagt: Die Lehrerinnen und Lehrer müssen über *diagnostische Kompetenzen* verfügen. Dabei sollte nicht die Frage, was ein Schüler oder eine Schülerin noch nicht kann, sondern die Frage, was er oder sie schon kann, im Vordergrund stehen, denn die weitere individuelle Förderung muss auf den vorhandenen Kompetenzen aufbauen. Diese Sichtweise wird im fachdidaktischen Konzept einer ***kompetenzorientierten Diagnose*** umgesetzt. Dieses Konzept ist ausführlicher in BÜCHTER & LEUDERS (2005a, Kap. 5.1) und in LANDESINSTITUT FÜR SCHULE/QUALITÄTSAGENTUR (2006) dargestellt.

In Klassenarbeiten oder anderen Leistungsüberprüfungen geht es zwar zunächst darum, die Leistungen von Schülerinnen und Schülern in zentralen Bereichen des Fachs möglichst gut zu erfassen und zu bewerten. Wenn dies aber mit verstehensorientierten Aufgaben, die Bearbeitungen auf verschiedenen Niveaus zulassen, geschieht, lassen sich immer auch vorhandene Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in den Blick nehmen. So kann z. B. die Klassenarbeit zumindest teilweise ein diagnostischer Ausgangspunkt für kommende Lernprozesse und nicht nur eine summative Evaluation bereits abgeschlossener Lernprozesse sein.

Leistungsüberprüfungen als Bestandteil selbstregulierten Lernens

Die Forderung nach einem stärker selbstregulierten Lernen ist heute Konsens innerhalb der Psychologie, der Erziehungswissenschaft und der Fachdidaktiken. Egal ob mit reformpädagogischen Konzepten, mit einer lerntheoretischen Variante des Konstruktivismus oder mit aktuellen neurobiologischen Befunden begründet, soll den Schülerinnen und Schülern mehr Freiheit *und* mehr Verantwortung für ihren Lernprozess übertragen werden. Dabei ist besonders wichtig, dass Schülerinnen und Schüler sich angemessen selbst einschätzen zu können, um anschließend gemäß ihrer vorhandenen Kompetenzen neue Herausforderungen zu suchen.

Bei dieser *Selbsteinschätzung* können sie durch Selbsteinschätzungsbögen und darauf abgestimmte Aufgaben zur Leistungsüberprüfung, die sie im Idealfall selbst auswerten können, unterstützt werden. In Schweden werden mit solchen Materialien vom dortigen SKOLVERKET seit vielen Jahren gute Erfahrungen gemacht, in Deutschland gibt es vermehrt Ansätze in diese Richtung – u. a. in Projekten im Rahmen von SINUS-Transfer (vgl. LANDESINSTITUT FÜR SCHULE/QUALITÄTSAGENTUR 2006, Kap. 3).

Leistungsüberprüfungen jenseits der schriftlichen Klassenarbeit

Schließlich muss bei einer Modulerläuterung für ein Programm zur Unterrichtsentwicklung, die sich fast ausschließlich mit schriftlichen Leistungsüberprüfungen beschäftigt, betont werden, dass auf diesem Wege nur ein Ausschnitt der mathematischen Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern erfasst werden kann. Gerade viele kommunikative, expressive oder kreative Kompetenzen lassen sich mit Papier und Bleistift und den Rahmenbedingungen einer Klassenarbeit kaum erfassen. Zur Ergänzung sollten Schülerinnen und Schüler mit Projektarbeiten, Portfolios oder ähnlichen Konzepten die Gelegenheit haben, ihre Kompetenzen umfassender in die Bewertung einzubringen.

Literatur

BLK (1997). *Gutachten zur Vorbereitung des Programms „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts". Materialien zur Bildungsplanung und zur Forschungsförderung, Heft 60.* Bonn: Bund-Länder-Kommission für Bildungsplanung und Forschungsförderung.
http://sinus-transfer.uni-bayreuth.de/fileadmin/MaterialienBT/heft60.pdf

BMBF (Hrsg.) (2001). *TIMSS – Impulse für Schule und Unterricht. Forschungsbefunde, Reforminitiativen, Praxisberichte und Video-Dokumente.* Bonn: Bundesministerium für Bildung und Forschung.

http://www.bmbf.de/pub/timss.pdf

BONSEN, M., BÜCHTER, A. & OPHUYSEN, S. VAN (2004). Im Fokus: Leistung. Zentrale Aspekte der Schulleistungsforschung und ihre Bedeutung für die Schulentwicklung. In H.G. HOLTAPPELS, K. KLEMM, H. PFEIFFER, H.-G. ROLFF & R. SCHULZ-ZANDER (Hrsg.), *Jahrbuch der Schulentwicklung. Band 13. Daten, Beispiele und Perspektiven* (S. 187-223). Weinheim/München: Juventa.

BONSEN, M. & GATHEN, J. VON DER (2004). Schulentwicklung und Testdaten – die innerschulische Verarbeitung von Leistungsrückmeldungen. In H.G. HOLTAPPELS, K. KLEMM, H. PFEIFFER, H.-G. ROLFF & R. SCHULZ-ZANDER (Hrsg.), *Jahrbuch der Schulentwicklung. Band 13. Daten, Beispiele und Perspektiven* (S. 225-252). Weinheim/München: Juventa.

BRUDER, R. (2000). Akzentuierte Aufgaben und heuristische Erfahrungen. In W. HERGET & L. FLADE (Hrsg.), *Mathematik lehren und lernen nach TIMSS. Anregungen für die Sekundarstufen* (S. 69-78). Berlin: Volk und Wissen.

BÜCHTER, A. & LEUDERS, T. (2005a). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern – Leistung überprüfen.* Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.

BÜCHTER, A. & LEUDERS, T. (2005b). Standards für das Leisten brauchen Aufgaben für das Lernen! *PM - Praxis der Mathematik in der Schule, 47 (2)*, S. 40-41.

BÜCHTER, A. & LEUDERS, T. (2005c). Zentrale Tests und Unterrichtsentwicklung ... ... bei guten Aufgaben und gehaltvollen Rückmeldungen keine Widerspruch. *PÄDAGOGIK, 57 (5)*, S. 14-18.

BÜCHTER, A. & LEUDERS, T. (2006). Was ist eine gute Aufgabe? Das kommt darauf an! (Erscheint in *Praxis der Naturwissenschaften – Chemie in der Schule*)

DAVIER, M. VON & HANSEN, H. (1998). *BLK- Programmförderung: „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts“. Erläuterung zu Modul 10: Prüfen: Erfassen und Rückmelden von Kompetenzzuwachs“.* Kiel: Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften.
http://sinus-transfer.uni-bayreuth.de/index.php?id=936

FEND, H. (1980). *Theorie der Schule.* München, Wien & Baltimore: Urban & Schwarzenberg.

HERGET, W. (Hrsg.) (2000). Aufgaben öffnen. *mathematik lehren*, Heft 100.

HUßMANN, ST. & LUTZ-WESTPHAL, B. (2006). *Kombinatorische Optimierung erleben.* (Erscheint im Vieweg Verlag)

LANDESINSTITUT FÜR SCHULE/QUALITÄTSAGENTUR (Hrsg.) (2006). *Kompetenzorientierte Diagnose. Aufgaben für den Mathematikunterricht.* Stuttgart: Klett.
http://www.learn-line.nrw.de/angebote/sinus/projekt5/index.html

LEUDERS, T. (2006). *SINUS-Transfer. Erläuterung zu Modul 9: „Verantwortung für das eigene Lernen stärken“.* Kiel: Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften.
http://www.sinus-transfer.de

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. & WIJERS, M. (2005). Mathematics standards and curricula in the Netherlands. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 37 (4),* S. 287-307.

VOM HOFE, R. (Hrsg.) (2003). Grundvorstellungen entwickeln. *mathematik lehren*, Heft 118.

WINTER, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der GDM, Heft 61,* S. 37-46.

WITTMANN, E. CH. (1982). Unterrichtsbeispiele als integrierender Kern der Mathematikdidaktik. *Journal für Mathematik-Didaktik, 3 (1),* S. 1-18.

WITTMANN, E. CH. (1992). Mathematikdidaktik als „design science“. *Journal für Mathematik-Didaktik, 13 (1),* S. 55-70.

Autor

ANDREAS BÜCHTER

Landesinstitut für Schule/Qualitätsagentur

Paradieser Weg 64

59494 Soest

andreas.buechter@mail.lfs.nrw.de