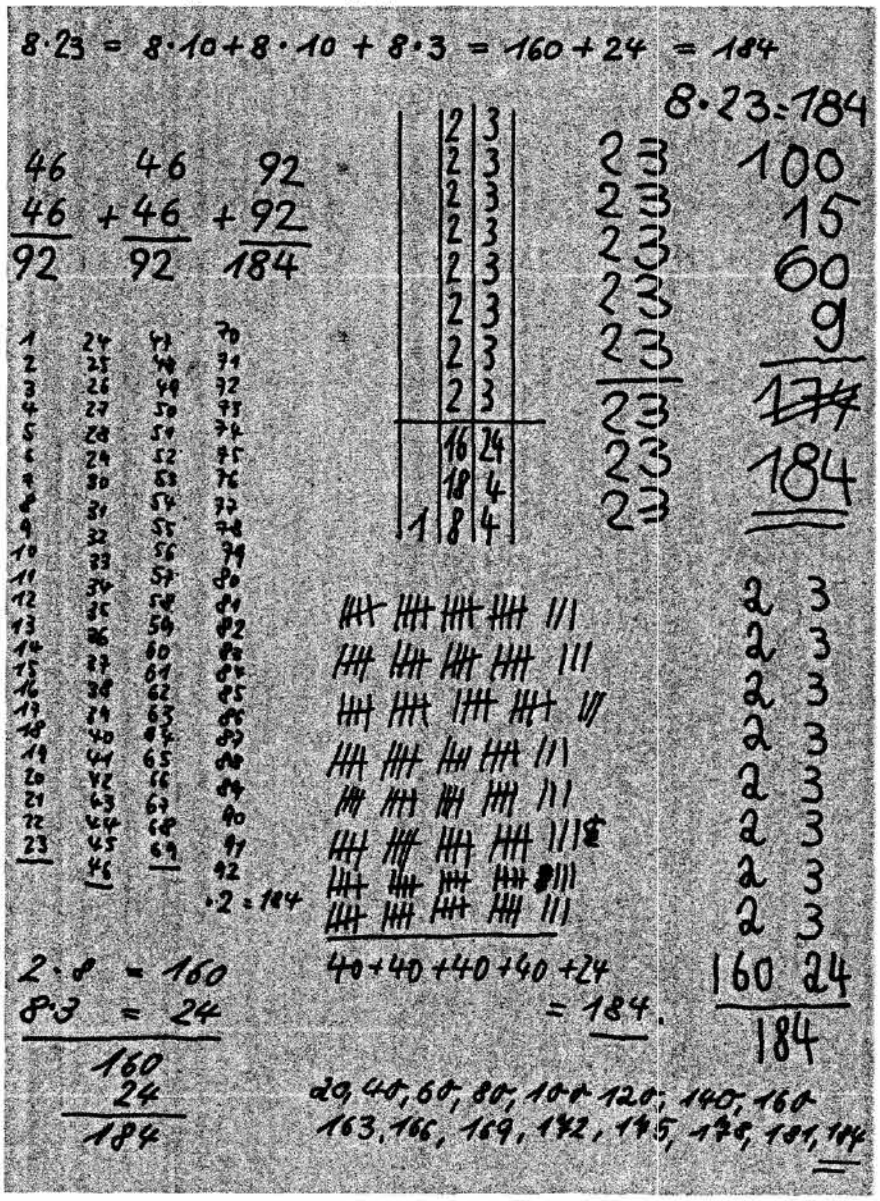
Fortschreitende Schematisierung

ein natürlicher Weg zur schriftlichen Multiplikation und Division im 3. und 4. Schuljahr von A. Treffers

Vor Kontextaufgaben gestellt, „vergessen" Schüler oft das 1×1 zu benutzen. Sie wenden eigene Methoden an. Ausgehend von Beobachtungen des Problemlöseverhaltens von Schülern werden Beispiele zur fortschreitenden Schematisierung vorgestellt, die einen natürlichen Weg aufzeigen durch bedeutungsvolle Rechenhandlungen zu den Algorithmen der schriftlichen Rechenverfahren zu gelangen. Bei einheitlichem Angebot ermöglicht der skizzierte Lehrgang eine Differenzierung nach der Lösungsstrategie.

Abb. 1: 8×23: Lösungen einer Schülergruppe



Eine Frage an Sie

„Der Weihnachtsmann läßt acht Boten im Dorf Geschenke verteilen. Jeder hat einen Sack mit 23 Päckchen. Wieviele Geschenke sind das zusammen?"

Diese Aufgabe wurde am Anfang des dritten Schuljahres gestellt. Einige Lösungen einer Schülergruppe zeigt Abb. 1.

Bitte analysieren Sie vor dem Weiterlesen die Aufgabe mit den verschiedenen Lösungen von Schülern.

Schülerlösungen auf verschiedenen Schematisierungsstufen

Im Titel ist von schriftlicher Multiplikation und Division die Rede. In der Aufgabe kommt kein Rechenzeichen vor und nur eine in Ziffern ausgeschriebene Zahl. Es hätte noch „primitiver" sein können: Das Bild eines Weihnachtsmannes mit acht Gehilfen. Jeder trägt einen Sack, von denen jeder nach Angabe 23 Päckchen enthalten soll.

Die Kinder wären so etwas schon gewöhnt. Etwa aus einem zweiten Schuljahr:

a) Eine Abbildung von 7 Körben, in denen je 6 Eier sichtbar sind. „Wieviele Eier?"

b) Eine Abbildung von 7 Körben mit der Beischrift „In jedem Korb sind 6 Eier. Wieviele Eier?"

c) Ein Text: „Ich habe 7 Körbe; in jedem 6 Eier. Wieviele Eier?"

Vier Schüler wurden zu Fassung b) beobachtet.

① Schüler ① zählte – sehr schnell: 1, 2, 3, 4, 5, 6 mit den Fingern beim ersten Korb, 7, 8, 9, 10, 11, 12 mit den Fingern beim zweiten usw., bis 37, 38, 39, 40, 41, 42 mit dem Finger beim siebten.

② Schüler ② zählte, während sein Finger von dem einen Korb zum nächsten glitt: 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42.

③ Schüler ③ tat es wie ②, aber ohne seinen Finger zu verwenden.

④ Schüler ④ sagte: $7 \cdot 6 = 42$.

(Man könnte sich zwischen ① und ② noch eine Variante denken; einen Schüler, der wie ① verfährt, aber ohne den Finger zu verwenden.)

Wie hätten diese Schüler in der Situation a) oder c) reagiert? Wäre ④ in Situation a) zum Addieren übergegangen? Hätte ① die Situation c) als Multiplikation interpretiert oder gar nichts geleistet? Sind ② und ③ doch irgendwie unbewußt vom Einmaleins der Sechs beeinflußt? Statt $1 \cdot 6 = 6$, $2 \cdot 6 = 12$, $3 \cdot 6 = 18$, ... sagt man eben einfacher 6, 12, 18, ... auf, während man den Finger oder den Blick auf die Körbe richtet oder sonstwie die Schritte im Multiplikator kontrolliert. Viele Fragen!

① bis ④ ist eine Stufenleiter der Schematisierung ein und derselben Aufgabe. Hätte ich dem noch als ⑤ ein „nacktes" $7 \cdot 6 = ?$ hinzufügen sollen? Nein! ⑤ liegt auf einem anderen Geleis. ⑤ kann schwerer oder leichter als ① bis ④ sein. Das hängt ganz ab von der Stelle im Lernprozeß des betreffenden Schülers, von der Vorgeschichte in dem Lehrsystem, dem er unterworfen war.

Dagegen sind von ① nach ④ fortschreitende Schematisierungen des Lösungsweges sichtbar.

Nun ja, es sind verschiedene Schüler. Aber irgendwann hat ④ es so gemacht wie ① und eines schönen Tages wird ① es so machen wie ④ jetzt. Vielleicht erreicht er es selbständig, vielleicht, indem er es dem anderen absieht, vielleicht, weil der Lehrer einmal verschiedene Schüler im Klassengespräch gefragt hat, wie sie diese oder jene Aufgabe gelöst haben. Alle durchlaufen sie diese Progression der Schematisierung, der eine schneller, der andere langsamer, der eine sprungweise, der andere Schritt für Schritt.

Aber zurück zu der Aufgabe, die Ihnen gestellt wurde! Erstens fiel Ihnen wohl auf, daß die Frage nicht einfach „$8 \cdot 23 =$" lautete. Man sitzt auf dem Geleis von ① nach ④, etwa in der Nähe von ③. Oder doch noch näher zu ②? Den Weihnachtsmann mit seinen Gehilfen kann man sich doch lebhaft vorstellen – die 23 Päckchen allerdings kaum. In dem Lehrgang, von dem hier die Rede ist, fährt man meistens auf diesem Geleis und springt hin und wieder hinüber auf das von ⑤, denn das Rechnen mit kleinen Zahlen sollen sie ja auch lernen. Aber sie tun es integriert. In einen Kontext integriert, wenn sie es lernen und mit Anwendungen integriert.

Zweitens wird Ihnen die Mannigfaltigkeit der Lösungen und Lösungsversuche aufgefallen sein. Sie ist in Wirklichkeit noch größer als in Abb. 1 wiedergegeben:

– mit wiederholter Addition, ohne Verwendung des Einmaleins:
$23+23 = 46$; $46+23 = 69$; $69+23 = \ldots$

– mit wiederholter Addition nebst Einmaleinssprüngen:
$20+20+20+\ldots, 3+3+3+\ldots, 160+24 = 184$

– über Zwischenaufgaben, mit oder ohne Einmaleins:
$8 \cdot 23$ über $5 \cdot 23$ und $3 \cdot 23$, oder $8 \cdot 10$, $8 \cdot 20$ und $8 \cdot 3$

– nach der Verdoppelungsmethode:
$23+23 = 46$, $46+46 = 92$, $92+92 = 184$. Oder aber $23+23+23+23 = 92$, $92+92 = 184$. Oder: $20+20 = 40$, $40+40 = 80$, $80+80 = 160$, $160+24 = 184$

– aufgrund allerlei anderer Zähl- und Rechenstrategien, zum Beispiel des achtmaligen Abtragens von 23 auf einer langen Zahlengeraden, oder als $8 \cdot 25 - 8 \cdot 2$, teils ohne das Einmaleins, teils mit ihm.

Drittens werden Sie den geringen Einfluß des erlernten Einmaleins bemerkt haben.

Offenbar ist das Angreifen von Kontextproblemen noch ungenügend mit dem eingeprägten Einmaleins verbunden – wenigstens in dieser Gruppe. Das ist an und für sich nicht schlimm, denn allmählich kommen sie doch dahinter, daß es bequem ist, oft zu wiederholende Additionen durch das Einmaleins zu vereinfachen. Insbesondere drängt sich das dort auf, wo mit Zehnern gerechnet werden muß, etwa bei Aufgaben wie $8 \cdot 20$ und in Griffen von 10 Summanden zugleich wie bei $12 \cdot 23$, $21 \cdot 23$ usw. Im Anfang schätzen wir aber auch informelle Methoden positiv ein, wie das Aufteilen und Verdoppeln. Beim Rechnen mit Kunstgriffen und beim Kopfrechnen behalten sie ja doch ihre Bedeutung. Aber, wie gesagt, in der Unterrichtspraxis zeigt sich, wenn nach einiger Zeit große Zahlen erscheinen, daß fast alle Schüler sich des Einmaleins bedienen.

Fortschreitend Schematisieren

Das Prinzip, das hier anläßlich der schriftlichen Multiplikation beispielhaft auseinandergesetzt wurde, nennen wir: fortschreitend Schematisieren.

Es ist integrierter Unterricht nach dem Prinzip des fortschreitenden Schematisierens, wie er von Wiskobas (1) entwickelt wurde. In mannigfacher Weise unterscheidet er sich vom traditionellen Unterricht im schriftlichen Rechnen.

Für den traditionellen Rechenunterricht scheint es charakteristisch zu sein, daß schriftliches Rechnen isoliert unterrichtet wird, in einem Lehrgang, der im großen und ganzen nach dem Prinzip der fortschreitenden Komplikation der Aufgaben vorgeht. Erst lernt man einziffrige Zahlen zu multiplizieren, dann etwa ein- mit zweiziffrigen, dann eine einziffrige Zahl mit einer dreiziffrigen, einziffrige mit vierziffrigen, zwei- mit zweiziffrigen, zwei- mit dreiziffrigen, zwei- mit vierziffrigen usw. Außer von der Länge der Zahlen wird die Komplexität auch von der erforderlichen Zahl von Überträgen bestimmt und von der Stelle, auf der eine etwaige Null steht. Das Kompliziertere kommt an die Reihe, wenn das Einfache recht beherrscht wird. Wohlgemerkt, das sind dann fast ausschließlich nackte Rechenaufgaben, oder mit anderen Worten: das übliche schriftliche Rechnen ist klar getrennt von Kontextaufgaben.

Adry Treffers
Molmweg 47
Baarn/Niederlande
ist Mitarbeiter der Fachgruppe OW&OC an der Universität Utrecht.

Derart eingerichtete Lehrgänge enthalten zur Multiplikation und Division 600 bis 1000 nackte Übungsaufgaben, die etwa 60 bis 100 Stunden Beschlag legen.

Resultat dieses ausgiebigen Trainings: Etwa zwei von drei Schülern beherrschen nach sechs Schuljahren die Algorithmen. Allerdings – und das stellt den Gewinn in Frage – werden beim Lösen von Kontextaufgaben erworbene Prozeduren häufig nicht verwendet, wie zahlreiche Untersuchungen zeigen. Bei Multiplikationsaufgaben treiben die Schüler ziemlich häufig eine Art wiederholten Addierens; bei Kontextproblemen, die eine Division erfordern, bleibt es bei wiederholtem Addieren und Subtrahieren. Wie es anders geht, wurde oben gezeigt.

Der Lehrgang des Multiplizierens

An Stelle eines ausführlichen Unterrichtsentwurfs, der den Rahmen sprengen würde, kann hier der Lernweg nur in groben Zügen aufgezeigt werden.

Im Anfangsstadium des Lehrgangs knüpft man an die verschiedenartigen additiven und multiplikativen Methoden an, deren sich die Schüler bei Kontextaufgaben bedienen.

Die Verwendung des Einmaleins statt der Addition wird dann ausdrücklich angeregt. Ausdrücklich wird auch auf den Nutzen der Strategie der Zehnergriffe im Multiplikator hingewiesen, die manche Schüler ja selber bei Aufgaben wie 12×23 und 21×23 entdecken.

Eine Aufgabe wie:
„In einem Adreßbuch von 62 Seiten stehen auf jeder Seite 45 Namen; wieviele Namen stehen im Buch?"
kann dann folgendermaßen gelöst werden:

10·45 = 450	45 10	450	450
10·45 = 450	10	450	450
10·45 = 450	10	450	450
10·45 = 450	10	450	450
10·45 = 450	10	450	450
10·45 = 450	10	450	450
2700		2700	90
1·45 = 45			2790
1·45 = 45		2· 90	
90		2790	
60·45 = 2700			
2·45 = 90			
62·45 = 2790			

Nach etwa zehn Stunden wird diese Aufgabe von den meisten folgendermaßen behandelt:

45+45+45+ ... wird in Gedanken senkrecht notiert, was mit einer weit ausholenden Handbewegung symbolisiert wird; aus der 62 Zeilen langen Spalte werden sechs Griffe von 10 Summanden hergenommen und aufgeschrieben, darunter noch einmal zwei einzelne, wonach schließlich die Teilergebnisse addiert werden.

Das Aufschreiben geschieht systematisch, die Teilergebnisse werden systematisch ausgerechnet und dann zusammengefaßt.

Die nächsten Phasen, die hier in Sicht kommen, sind weiter verkürzte Rechenweisen, etwa in dieser Abfolge:

60·40 = 2400	60·45 = 2700	62·45
60· 5 = 300	2·45 = 90	2700
2·45 = 90	2790	90
2790		2790

In natürlicher Weise schlagen wir den Weg zum Standardalgorithmus ein: die Kinder übernehmen die bequemeren Rechenmethoden, erstens, weil sie sich den informellen additiven Strategien anschließen, zweitens weil sie die nötige Überzeugungskraft besitzen.

Im Verlauf des Unterrichts zeigte es sich, daß die Schüler nach etwa 15 Unterrichtsstunden

– Multiplikationen mit ziemlich großen Zahlen ausführen konnten

– auf verschiedenen Stufen der Schematisierung arbeiten konnten

– entsprechende Schreibweisen verwendeten.

Damit wird nach etwa 25 Unterrichtsstunden die Standardform erreicht.

Schriftliches Dividieren gemäß fortschreitender Schematisierung

Bei der schriftlichen Division als Pendant zeigt sich Entsprechendes, dann beim wiederholten Abziehen, das sich auch als wiederholtes Zuzählen auffassen läßt: schrittweises Verteilen läßt Reste – einen langen Schwanz, der dann beim Wegnehmen immer größerer Griffe von Zehnern, Hundertern usw. immer kürzer wird.

Auch hier wird der Weg nur in groben Zügen aufgezeigt.

Wir betrachten die fortschreitende Schematisierung des Divisionsalgorithmus in großen Zügen an der Beispielaufgabe: Verteile 324 Briefmarken ehrlich unter vier Kinder; vieviel bekommt jedes einzelne?

Phase 1: Die Verteilung wird konkret ausgeführt, erst stückweise, aber dann schnell mit größeren gleichen Portionen.

Phase 2: Die Verteilung geschieht im Kopf und wird so notiert, daß man ablesen kann, wieviel verteilt und wieviel noch zu verteilen ist. Das kann verkürzt geschehen.

	Rita	Gerd	Rosi	Hans
324				
40	10	10	10	10
284				
40	10	10	10	10
244				
40	10	....	....	....

Phase 3: Die Griffe werden umfangreicher und die Schreibweise wird weiter schematisiert und verkürzt.

	Rita	Gerd	Rosi	Hans
324				
200	50	50	50	50
124				
120	30	30	30	30
4				
4	1	....	....	....
0	81			

Phase 4: Der größtmögliche Griff von Zehnern und Einern wird je Runde verteilt, oder er wird wenigstens angestrebt. Die Schreibweise ähnelt schon mehr der Standardmethode.

324	: 4	80
320		
4		1
4		
0		81

Nach 10–15 Stunden arbeiten die Schüler

6394 : 12	
2400	200
3994	200
2400	100
1594	30
1200	
394	2
360	
34	
24	
10	532

6394 : 12	500
6000	30
394	
360	
34	
24	2
0	532
R 10	

auf Stufen, wie in obiger Abb. angegeben, an der Division 6394:12.

Will man nun mit der ganzen Gruppe zu (c) als Endstufe, so wird es noch etwa zehn Stunden erfordern, bis eine wirklich große Anzahl so weit ist.

Für den letzten Schritt zur heute üblichen Standardmethode kommen nochmals zehn Stunden hinzu. Es ist nämlich aus der Literatur und der Praxis bekannt, daß gerade diese Transformationen neue Probleme erzeugen. Begnügt man sich aber mit den angegebenen differenzierten Arbeitsweisen, so ist der Divisionslehrgang nach 20 Stunden beendet.

Schriftliches Rechnen mit Kunstgriffrechnen integriert

Nach der fortschreitenden Schematisierung, die an den Beispielen 23·8 und 324:4 erörtert wurde, erregt die spezifische Rolle der Kontextaufgaben die Aufmerksamkeit – eine Rolle, die durchaus anders liegt als im traditionellen Unterricht des schriftlichen Rechnens, wo nackte Rechenaufgaben im Mittelpunkt stehen. Wo dort von Kontextaufgaben die Rede ist, handelt es sich um „Anwendungen" von Rechenprozeduren, die mittels nackter Rechenaufgaben erlernt worden sind. Mit anderen Worten: Kontextaufgaben sind im üblichen Rechenunterricht oft nicht Einstieg zum Erlernen des schriftlichen Rechnens. Das ist das gerade Gegenteil zum integrierten schriftlichen Rechnen, wo sie bei allen wichtigen Marksteinen dem Antrieb zu Schematisierung

Familie Eichhörnchen sammelt Eicheln und Nüsse

Das ist die
Familie Eichhörnchen.
Sie sammelt Eicheln
für den Winter.

Jedes Eichhörnchen
bringt 12 Eicheln.

Opa Eichhörnchen ist
im letzten Jahr vom
Baum gefallen und
kann nicht mitsammeln.

Dafür soll er ausrechnen, wieviele
Eicheln es sind.
Er freut sich,
wenn du ihm hilfst.

Sie sammeln
auch Nüsse.

Oma, Mutter und
Vater Eichhörnchen
bringen jeder 23 Nüsse.

Von den vier Kindern
bringt jedes 18 Nüsse.

Opa Eichhörnchen
soll ausrechnen,
wieviele Nüsse da sind.

Sie haben viele Tage
Eicheln und Nüsse
gesammelt. Jetzt kann
der Winter kommen,
dann werden die Nüsse
verteilt.

Nachdem die Familie Eichhörnchen sehr fleißig
Eicheln und Nüsse gesammelt hatte, waren 1008 Eicheln
und 1656 Nüsse in ihrem Vorratsspeicher. Wie viele
Eicheln und Nüsse kann jedes Eichhörnchen der Familie
im Winter essen?

und Verkürzung dienen. Dahinter steckt die Idee, daß das Erlernen des schriftlichen Rechnens durch Kontextaufgaben erleichtert wird: die Schüler können und werden sich beim Ausführen der Rechenhandlungen etwas Konkretes vorstellen. Andererseits vergrößert sich die Anwendbarkeit durch die organische Verbindung zwischen den formell rechnerischen Prozeduren und den informellen Lösungsmethoden der Kinder bei Kontextaufgaben, die von Anfang an herrscht.

Das „integriert" steht aber nicht nur für die Beziehung zwischen schriftlichem Rechnen und Anwenden, sondern ebensowohl für die zum flexiblen Rechnen, dem Kunstgriffrechnen und Schätzen. Systematische Aufmerksamkeit soll sicher dem vorgreifenden Schätzen des Ergebnisses gewidmet werden. Kunstgriffe, die auf allerlei Eigenschaften und Regeln beruhen, sollen nicht vernachlässigt werden. Es ist nicht einmal so schwierig, da tatsächlich viel an Kunstgriffen verfügbar ist – Schätzen, Rechnen mit Nullen, Distributivität . . .

Kurzum, allerlei gewichtige Argumente sprechen dafür, Schätzen, Kunstgriffe, flexibles Rechnen und das Lösen von Kontextaufgaben in den Aufbau des schriftlichen Rechnens einzubeziehen.

① Maren, Kerstin und Torsten bekommen jeden Sonntag ihr Taschengeld für die nächste Woche. Maren ist die Jüngste, sie bekommt 6 DM, Kerstin bekommt 7 DM, Torsten, als der Älteste, bekommt 12 DM. Wieviel bekommen die Kinder zusammen in einem Jahr? (Das Jahr hat 52 Sonntage.)
② Maren, Kerstin und Torsten haben für den Urlaub Taschengeld gespart. Maren hat 35 DM, Kerstin 48 DM und Torsten 62 DM. Sie fahren mit ihren Eltern nach Österreich. Bei der Bank bekommen sie für 1 DM 7 Österreichische Schillinge. Wieviel Schillinge bekommen die Kinder, wenn sie ihre Gespartes umtauschen?
③ Im Landschulheim werden an die Kinder 108 Äpfel verteilt. Es sind 36 Kinder. Wieviele Äpfel bekommt jedes Kind?
④ Simone soll für Vater, Mutter, Oma, Opa, für ihren Bruder und sich selber die Weihnachtsteller mit Äpfeln, Apfelsinen, Nüssen und Lebkuchenherzen belegen. Sie hat 12 Äpfel, 18 Apfelsinen, 216 Nüsse und 4 Beutel mit jeweils 24 Lebkuchenherzen. Wieviele Äpfel, Apfelsinen, Nüsse und Lebkuchenherzen bekommt jeder auf seinen Teller gelegt?
⑤ Zur Weihnachtsfeier kauft die Lehrerin 3 Kartons mit jeweils 24 Negerküssen. In der Klasse sind 18 Kinder. Wieviele Negerküsse bekommt jedes Kind?

Mit der Anreicherung des schriftlichen Rechnens durch Schätzen und flexibles Rechnen wird auch beabsichtigt, einer ganz auf Algorithmen gerichteten Zielsetzung entgegenzuwirken. Gerade im 3. bis 4. Schuljahr, wo der Unterricht so stark durch das regelgesteuerte Handeln des schriftlichen Rechnens bestimmt wird – wenigstens im üblichen Aufbau – liegt die Herausbildung eines un- oder antimathematischen Verhaltens nahe. Doch gibt es noch einen anderen Grund zur Integration des Schätzens und flexiblen Rechnens in das schriftliche Rechnen: so läßt sich häufig der auf die Dauer hemmenden Neigung zur additiven Lösung von Kontextaufgaben entgegenwirken. Das Schätzen selber spielt übrigens auch eine Rolle beim Verkürzen der partiellen Prozeduren.

Zusammenfassung

Integrierter Unterricht im schriftlichen Rechnen, dessen Lehrgang nach dem Prinzip fortschreitender Schematisiserung von Rechenhandlungen eingerichtet ist, bildet sozusagen das Spiegelbild des traditionellen isolierten Unterrichts gemäß fortschreitender Komplizierung. Die Einzelschritte unterscheiden sich dann nicht nach äußerlicher Komplexität etwa hinsichtlich der Zahlengröße, sondern nach der Stufe der Schematisierung und dem Maße der Verkürzung, die in den Rechenhandlungen erreicht ist. Das schließt in sich, daß die Schüler schon von Anfang an mit recht großen Zahlen rechnen, dann allerdings auf der entsprechenden Stufe von Schematisierung und Verkürzung. Im Laufe der Zeit werden dieselben Aufgaben immer kürzer notiert und schneller berechnet. Die Dauer des Lehrgangs kann von Schüler zu Schüler variieren. Das erstrebte Endziel braucht nicht für alle Schüler übereinzustimmen. Einer heterogen zusammengesetzten Gruppe kann man dieselben Aufgaben stellen, die nach differenzierten Prozeduren gelöst werden.

1. Der Lehrgang fängt zwanglos mit einer Art geschickter Benutzung des Einmaleins (auch der Zehn) an; im weiteren Verlauf spielt das Schätzen eine wichtige Dauerrolle.

2. Kontextaufgaben sind die Quelle des Algorithmisierungsprozesses. Sie verleihen ja den Rechenhandlungen Bedeutung und dienen dem Ausführen der Prozeduren als Stütze.

3. Man knüpft an den informellen Methoden der Kinder zum Lösen von Kontextaufgaben an. Bei der Betrachtung der Methoden im Gruppengespräch wird zur Anwendung der geeignetesten Methoden angeregt. Kurzum, es ist ein natürlicher Weg, der zu den entsprechenden Algorithmen hin eingeschlagen wird, die sich auf ihm allmählich entwickeln.

4. Von Anfang an werden Aufgaben mit ziemlich großen Zahlen gestellt. Die Kinder lösen sie verschiedenartig: Einheit im Angebot, Differenzierung nach der Lösungsstufe.

5. Schriftliches Rechnen wird mit Kunstgriffrechnen verknüpft.

6. Im Laufe des Lehrgangs findet immer stärkere Schematisierung und Verkürzung statt.

7. Die Endstufen sind entsprechend den Endzielen variabel.

Das wäre eine Skizze von Aufbau des schriftlichen Rechnens, dessen große Linien eigentlich schon im Anfang dieses Jahrhunderts von Kühnel (2) gezogen wurden. Die Resultate sind erheblich besser als beim traditionellen Aufbau (3).

Anmerkungen

(1) A. Dekker, H. ter Heege, A. Treffers: Cýferend vermenigvuldigen en delen volgens Wiskobas. Vakgroep OW & OC, Rýksuniversiteit Utrecht, Publ. 1, 1982.

Methoden, die dieser ähneln, findet man mehrfach vorgeschlagen. Aber entweder wird das fortschreitende Schematisieren eher erzwungen (die Phasen folgen einander zu schnell, den Kindern wird wenig überlassen), oder es fehlt ganz an Steuerung und Sicht auf die Phasen, oder man lehnt bewußt die Steuerung zur Standardmethode hin ab.

(2) J. Kühnel: Neubau des Rechenunterrichts II. Leipzig, Klinkhardt, 1925.

M. Wertheimer: Productive thinking. New York, Harper 1945. Erweitert: London, Associated Book Publishers 1966.

(3) Das ergibt sich aus zahlreichen niederländischen Forschungsarbeiten und Erfahrungen in Versuchsschulen. Der Zeitgewinn beim schriftlichen Rechnen beträgt über 50 %, wobei allerdings die Aufmerksamkeit für flexibles Rechnen abgezogen werden muß. Es gibt so gut wie keine Versager, wenn man weniger verkürzte Algorithmen – hauptsächlich bei der Division – gestattet. Eine allgemeine Zusammenfassung, siehe Fußnote (1).

Anlage 4:
aus Selter, Ch. (2006): Mathematiklernen in heterogenen Lerngruppen. In: P. Hanke (Hg.): Grundschule in Entwicklung. Münster: Waxmann, S. 128-144, dort Kap. 4.

4 Offenheit mit Konzept

Als in dem zweiten Schuljahr, dem auch Nina und Sven angehörten, die unterrichtliche Behandlung des Einmaleins anstand, führte die Lehrerin zunächst eine schriftliche Standortbestimmung durch (vgl. Sundermann & Selter 2006, S. 21ff.). Standortbestimmungen dienen der fokussierten Ermittlung individueller Lernstände. Sie versorgen einerseits die Lehrpersonen in einer alltagstauglichen Weise strukturierte Informationen über die Kompetenzen und Defizite der einzelnen Kinder; mit ihnen kann man sich zudem einen Überblick über das Leistungsvermögen der Lerngruppe in der Zusammenschau verschaffen. Die Standortbestimmungen geben aber nicht nur der Lehrerin eine Grundlage für die Planung des nachfolgenden Unterrichts und für individuelle Förderung, sondern sie tragen des Weiteren dazu bei, dass die Kinder in zunehmendem Maße Transparenz über ihr eigenes Lernen erhalten können (Was kann ich schon? Was muss ich noch lernen?)

Das generelle Ergebnis der Standortbestimmung überraschte nicht: So gab es Kinder, die das Einmaleins offensichtlich schon vollständig beherrschten, und andere, die noch nicht über die Grundvorstellungen des Multiplizierens zu verfügen schienen. Da die Multiplikation und die Division ein recht umfangreiches Themenfeld darstellen, entschied die Lehrerin sich zu einer Zweiteilung des Arbeitspensums. Phase 1 diente der Grundlegung des multiplikativen Rechnens, hier befassten sich die Schülerinnen und Schüler u. a. mit ausgewählte Situationen, bildliche Darstellungen und Kontextaufgaben, die als ‚Ausgangspunkte' des Lernprozesses dienten. Außerdem wurde die Basis für die Ausbildung tragfähiger Grundvorstellungen geschaffen, indem die Schüler die *wesentlichen* wechselseitigen Zusammenhänge zwischen Zahlensatz, Handlung, Bild und Text ausbildeten bzw. vertieften.

Die Kinder mussten alle Aufgaben des Pflichtbereichs bearbeiten, sie konnten dieses aber in ihrer eigenen Geschwindigkeit tun. Sie schloss mit einer Zwischenprüfung ab, zu der sich diejenigen anmelden konnten, die die ihr Pensum erfüllt hatten. Hierzu verschaffte sich die Lehrerin einen Überblick über die von den Kindern einzureichenden Arbeiten; außerdem sollten die Kinder anhand einiger Aufgaben nachweisen, dass die Anzahl der Punkte in rechteckigen Punktfelddarstellungen strukturiert, also nicht zählend, ermitteln konnten.

Im Anschluss daran erhielten sie – wie auch in Phase 1 – einen Arbeitsplan für die zweite Phase, der in der ersten Spalte die von den Kindern im Verlauf der nächsten drei Wochen zu behandelnden Aufgabengruppen angab. Die Aufgabengruppen 6 bis 9 bildeten den Pflichtbereich des zweiten Arbeitsplans. Durch die Angabe eines Sternchens wurden die Aufgaben der weiterführenden Anforderungen kenntlich gemacht. Diese waren nicht von allen Kindern verpflichtend zu bearbeiten.

Lernbericht Teil 2

Einmaleins-Forscherheft

von: ______________________

Aufgaben	angefangen	erledigt	Lernbericht
			Das kann ich
6. Einmaleins-Plan a) *mal 10, mal 5, mal 2:* Mb., S. 70, S. 71 und AH., S. 36, *S. 37 b) *mal 3, mal 6, mal 9:* Mb., S. 72, S. 73 und AH., S. 38, S. 39 c) *mal 4, mal 8, mal 7:* Mb., S. 74, S. 75 und AH., S. 40, S. 41	❑	❑	
7. Üben für den Einmaleins-Pass Forscherheft S. 8 bis S. 22	❑	❑	
8. Schulbuchseiten erfinden Diese Forscherblätter liegen auf dem Mathetisch aus.	❑	❑	
9. Geteiltaufgaben Mb., S. 78, S. 79 und AH., S. 42, S. 43 Mb., S. 80, S. 81 und AH., S. 44, S. 45, Nr. 1, 2 *3 Forscherheft S. 23 bis S. 26	❑	❑	
*** Forscheraufträge** Diese Forscherblätter liegen auf dem Mathetisch aus.	❑	❑	
*** Entdeckungen an der Einmaleins-Tafel** Mb., S. 98, S. 99 und AH., S. 54, S. 55 Diese Forscherblätter liegen auf dem Mathetisch aus.	❑	❑	
*** Die Einmaleins-Ergebnis-Tafel** Diese Forscherblätter liegen auf dem Mathetisch aus.	❑	❑	
*	❑	❑	

Bist du bereit für die Prüfung zum Einmaleins-Pass? ❑ ja ❑ nein, ich möchte noch üben

In der ersten Spalte erhielten die Kinder zudem Informationen, wo sie die zugehörigen Aufgaben im Mathematikbuch (Mb; verwendet wurde aufgrund seiner konzeptionellen Ausgereiftheit das ‚Zahlenbuch') bzw. im Arbeitsheft (AH) finden konnten. Des Weiteren finden sich Hinweise, welche Aufgaben aus dem Forscherheft (Sammlung von Arbeitsblättern) erledigt werden sollten und der Hinweis, dass einige Forscherblätter auf dem AB-Tisch bereit lagen. In den Spalten 2 und 3 machten die Kinder Kreuze, wenn sie die Aufgaben begonnen bzw. erledigt hatten, so dass sie eine Übersicht über ihr Arbeitspensum hatten. Nach Abschluss der jeweiligen Arbeiten trugen sie zum Zwecke der Erhöhung der Transparenz über ihren eigenen Lernprozess in einer Zielscheibe ein, wie gut sie ihres Erachtens die jeweilige Aufgabe bewältigt hatten. In das Leerfeld in der letzten Zeile konnten die Kinder dann noch eine selbst gewählte Zusatzaufgabe eintragen.

Die Kinder konnten nun – wie in Phase 1 -- innerhalb des grob vorgegebenen Zeitrahmens die Reihenfolge und den Zeitpunkt der Behandlung selbst bestimmen. Ebenso war ihnen frei gestellt, ob sie die Sternchen-Aufgaben bearbeiteten oder nicht. Auch hier bildete eine Prüfung den Abschluss. Insbesondere in einem geöffneten Unterricht, in dem nicht alle Kinder zur gleichen Zeit und in gleichem Tempo mit den gleichen Aufgaben befasst sind, tragen solche Kristallisationspunkte zur Information für die Lehrerin (Wer kann was, wer was noch nicht?) und als Orientierung und Motivation für die Kinder dazu bei, dass der Unterricht nicht in Beliebigkeit und damit ‚Leistungsschwäche' abdriftet.

Die Beschreibung einer typischen Unterrichtsstunde soll nun illustrieren, wie die Kinder und die Lehrerin arbeiteten. Es soll deutlich werden, dass die Kinder nicht nur beschäftigt sind, sondern ausgehend von ihren individuellen Vorerfahrungen Lernfortschritte machen können.

> Die Stunde beginnt mit einer Blitzrechenübung zum Einmaleins am Hunderterpunktefeld. Die Lehrerin erläutert daran anschließend, dass die Kinder in ihrem Einmaleinsheft weiter arbeiten, aber darüber hinaus sich auch mit weiterführenden Forschungsaufgaben oder Blitzrechenübungen am Computer (nicht auf das Einmaleins beschränkt) befassen können.
>
> Nachdem einige kleinere organisatorische Fragen geklärt worden sind, holen sich die Kinder ihr Material und beginnen individuell oder zu zweit zu arbeiten. Dabei benutzen sie auch Seitentische, einige von ihnen arbeiten auf dem Boden. Zu Beginn der Arbeitsphase kommen einige Kinder zur Lehrerin, um ihr etwas zu zeigen oder sie etwas zu fragen. Bei einem Gang durch die Klasse kann man feststellen, was die einzelnen Kinder tun. Einige Beispiele:
>
> Timo und Lili befassen sich mit Knobelaufgaben, die zu den weiterführenden Anforderungen gehörten. Sie rechnen jeweils zwei zusammengehörige Aufgaben aus (1+3 und 2·2; dann 3+5 und 2·4; dann 5+7 und 3·4; dann 7+9 und 4·4), sollen dann die nächsten beiden Aufgabenpaare finden, ebenfalls berechnen und aufschreiben, was ihnen auffällt. Sie notieren, dass es bei beiden Aufgaben stets die Ergebnisse der Viererreihe seien, außerdem: dass bei den untereinenander stehenden Plusaufgaben beide Summanden immer um 2 größer würden und dass bei den ebenfalls untereinander stehenden Malaufgaben der zweite Faktor ebenfalls stets um 2 wachse: „2, 4, 6, 8, 10, und so weiter."
>
> René sitzt mit seinem Mathematikbuch auf dem Boden und berechnet bzw. erinnert die Aufgaben der sog. kurzen Reihen (auch Kernaufgaben genannt), z. B. 1·3, 2·3, 5·3 und 10·3, die den Kindern als Stützpunktaufgaben dienen können, um die anderen Aufgaben des Einmaleins abzuleiten. Davor hat eine andere Aufgabe behandelt, bei der es jeweils um das Berechnen von Aufgabe und Tauschaufgabe ging.
>
> Nina und Patricia sitzen an einem Seitentisch und arbeiten zum selbst gewählten Thema Geheimschriften. Sie wollen in einigen Tagen eine Schatzsuche organisieren und haben zu dem Zweck aus Kindersachbüchern, von der Lehrerin zur Verfügung gestellten Unterrichtsmaterialien (Sundermann & Selter 2003) sowie dem Internet eine Reihe von Geheimschriften zusammen getragen und davon ausgehend selbst welche erfunden (zum Beispiele eine, bei der jeder Buchstabe durch eine bestimmte Farbe codiert wird), mit deren Hilfe sie ihre Geheimbotschaften verschlüsseln. Sie haben zu dem Zeitpunkt die Einmaleins-Zwischenprüfung bereits bestanden und auch schon einige Aufgaben aus dem zweiten Teil des Forscherheftes bearbeitet. Die beiden Kinder haben das Einmaleinslernen für den Moment beiseite gestellt.
>
> Lukas ermittelt die Anzahlen von Punkten, die im Rechtecksmuster (als Teile des Hunderter-Punktefeldes) angeordnet sind, also zum Beispiel in der 6·7 Anordnung. Die Lehrerin sieht beim Herumgehen – keinesfalls zu ihrer Überraschung –, dass Lukas noch häu-

fig dazu neigt, die Anzahlen durch Abzählen einzelner Punkte zu ermitteln. Die Lehrerin hat Zeit, sich zu ihm zu setzen, und ihn dazu anzuregen, wieder verstärkt die Strukturen der Punktefelder auszunutzen.

Murat fragt Mehmet: „Wie geht das?“ „Du musst immer einen Strich machen von der Aufgabe zum Ergebnis, so!“ Murat geht wieder zu seinem Platz und arbeitet an einer Aufgabe, bei der Malaufgaben und Ergebnisse der Aufgaben miteinander zu verbinden sind. Er verrechnet sich einmal und verbindet demzufolge zwei Felder falsch miteinander. Somit bleiben eine Aufgabe und ein Ergebnis übrig, die nicht zueinander passen. Daraufhin geht er wieder zu Mehmet. Murat weiß, dass Mehmet als Expertenkind für die Aufgaben fungiert. Die Kinder haben sich für Aufgaben, bei denen sie sich sicher fühlten, als Expertenkinder in einem Plakat eingetragen, das für alle Kinder einsehbar an der Tür hängt.

Sarah und Anna sitzen an einer Aufgabe, bei der sie ausgehend von den kurzen Reihen die Ergebnisse von anderen Aufgaben ermitteln können. So steht zum Beispiel die Aufgabe 6·3 unter 5·3 oder 9·7 unter 10·7. Die Lehrerin bittet sie, dieses am Ende der Stunde allen Kindern vorzustellen und zu erklären.

Sven sitzt am Rechner und übt das Blitzrechnen (Krauthausen 2002). Er hat aber keine Aufgaben des Einmaleins ausgewählt, sondern er rechnet rückwärts in Zweierschritten (48, 46, 44, …). Neben ihm sitzt Marc an einem anderen Computer und befasst sich mit Aufgaben des Typs ‚346 000 plus wie viel ist eine Million?’ „Das Einmaleins kann ich schon lange.“

Timo und Dennis sitzen an der Aufgabe, möglichst viele Malaufgaben mit dem Ergebnis 100 zu finden. Nach einiger Zeit sind sie sich sicher, alle Möglichkeiten gefunden zu haben, weil „zu 3, 6, 7, 8 und 9 gibt es keine Malaufgabe, die 100 ergibt.“

Steffi und Mira haben sich zur Prüfung für den Einmaleinspass angemeldet. Die Lehrerin stellt ihnen eine Reihe von Aufgaben. Da sie diese schnell und richtig beantworten können, bekommen sie einen Stempel in ihren Pass.

Cem und Peter sitzen in einer Ecke des Klassenzimmers und stellen sich zu Übungszwecken gegenseitig Aufgaben aus dem Förderkurs zum Blitzrechnen (Wittmann & Müller 1998). Sie wollen sich auch demnächst zur Einmaleins-Prüfung anmelden. Allerdings müssen sie dazu auch noch einige Aufgaben ihres Arbeitsplans erledigen. Auch die anderen Schülerinnen und Schüler der Klasse arbeiten an einer der Aufgaben des Arbeitsplans.

Am Ende der Stunde kommen die Kinder im Stuhlkreis vor der Tafel zusammen und Sarah und Anna erläutern ‚ihren’ Trick. Die Lehrerin unterstützt dies, indem sie selbst am OHP an Punktfeldern illustriert, wie die Aufgaben 5·4 und 6·4 zusammenhängen.

In dieser Stunde sind zwei kürzere Phasen gemeinsamen Arbeitens zu beobachten. An anderen Tagen gibt es durchaus auch längere Phasen, in denen Lehrerin mit der gesamten Klasse oder Teilen von ihr zusammen an einer Thematik arbeitet. Wie beispielsweise Punktefelder zu interpretieren, Einmaleinstabellen aufgebaut sind oder mit Geteiltaufgaben (1·1 umgekehrt) umzugehen ist, erschließt sich den meisten Kindern nicht von selbst. Auch gibt es manchmal die Notwendigkeit, mit mehreren Kindern Dinge noch einmal durchzusprechen, die die anderen Schülerinnen und Schüler bereits kennen bzw. beherrschen.

Entlastend ist in diesem Zusammenhang auch eine Regel, die die Kinder vom ersten Schultag an internalisiert haben: ‚Wenn du nicht weiter weißt, frage zunächst dich selbst – sprich: schau genau hin, versuche dich zu erinnern, ob du etwas Vergleichbares schon einmal gesehen hast. Wenn du dann immer noch nicht weiter weißt, bitte ein anderes

Kind oder – falls es ein solches gibt – ein Expertenkind, es dir zu erklären. Erst wenn du danach nicht weiter kommst, frage die Lehrerin.'

Was trägt nun dazu bei, dass die Schülerinnen und Schüler hier Lernfortschritte machen und nicht bloß beschäftigt werden? In meinen Augen sind es die folgenden fünf Punkte:

- Zum Einsatz kommen qualitätvolle Aufgaben, die zeitgemäßen Vorstellungen von aktiv-entdeckendem Lernen sowie beziehungsreichem Üben entsprechen. Da viele von ihnen offen, informativ bzw. prozessbezogen sind (vgl. Sundermann & Selter 2006, S. 73ff.), erlauben sie den Kindern – ausgehend von deren individuellen Kompetenzen und Defiziten – individuelle Zugänge und Bearbeitungsmöglichkeiten.
- Eingebettet sind die Aufgaben in ein schlüssiges, fachdidaktisch fundiertes Konzept. Die einzelnen Aufgaben sind aufeinander abgestimmt (z. B. in Bezug auf verwendete Veranschaulichungen) und decken das gesamte Spektrum ab (Einführung, materialgestütztes Üben, Ausbau von Rechenstrategien, strukturiertes Üben, automatisierendes Üben).
- Der verwendete Arbeitsplan enthält Grundanforderungen und weiterführende Anforderungen. Er gibt der Lehrerin im geöffneten Unterricht die Sicherheit, dass alle Kinder zumindest Aufgaben aus dem Bereich der grundlegenden Anforderungen bearbeiten. Den Kindern bietet er eine unerlässliche Orientierung und Motivation.
- Die Kontrolle der Lernfortschritte erfolgt regelmäßig. Die Kinder kontrollieren selbst, indem sie Lösungsblätter benutzen oder auf das ‚Zahlenbuch mit Lösungen' zurückgreifen; außerdem treffen sie sich regelmäßig zu Mathekonferenzen oder tauschen bisweilen ihre Arbeiten zur gegenseitigen Durchsicht aus. Die Lehrerin beobachtet die einzelnen Kinder beim Herumgehen, sichtet von Fall zu Fall die Arbeitsprodukte der Kinder; zudem findet an zwei Zeitpunkten im Lernprozess eine Prüfung statt, nach deren Bestehen die Kinder eine Bestätigung erhalten.
- Schließlich sind eingespielte Rituale mit verantwortlich für eine produktive Arbeitsatmosphäre: das tägliche Blitzrechnen zu Stundenbeginn, die Übernahme von kleineren Unterrichtsphasen durch die Kinder – zum Beispiel durch Präsentationen von Rätseln oder Knobelaufgaben zum Einmaleins, so dass Eigenproduktionen der Kinder wieder in den Unterricht zurück fließen –, die Mathekonferenzen, die Arbeit im beständig wachsenden Einmaleinsforscherheft oder die Existenz von Expertenkindern.

Programmträger: IPN, Kiel
Projektleitung: Prof. Dr. Manfred Prenzel
www.ipn.uni-kiel.de

SINUS-Transfer Grundschule
Projektkoordination am IPN: Dr. Claudia Fischer
Tel. +49(0)431/880-3136
cfischer@ipn.uni-kiel.de
www.sinus-grundschule.de

Programmkoordination für die Länder durch das Ministerium für Bildung und Frauen des Landes Schleswig-Holstein (MBF)
MR Werner Klein (SINUS-Transfer Grundschule)
http://landesregierung.schleswig-holstein.de

Landeskoordinatorenausbildung durch das Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung
StD Christoph Hammer; gemeinsam mit dem IPN
www.isb.bayern.de

Serverbetreuung: Zentrum zur Förderung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts der Universität Bayreuth (Z-MNU)
Leitung: Prof. Dr. Peter Baptist
http://zmnu.uni-bayreuth.de

Hinweis: Die Modulbeschreibungen sind während der Laufzeit des Programms SINUS-Transfer Grundschule (2004-2009) entstanden.
Die Liste der Kooperationspartner galt für diesen Zeitraum. Im Nachfolgeprogramm *SINUS an Grundschulen* sind die Kooperationen anders strukturiert.

ISBN für diese Modulbeschreibung (Mathematik G7)
978-3-89088-186-7