Erläuterungen zu Modul 9: Verantwortung für das eigene Lernen stärken

BLK-PROGRAMM

SINUS - Transfer

Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts

Mit geeigneten Aufgaben die Verantwortung für das eigene Lernen stärken

Timo Leuders

1. Eigenverantwortung und das Bild vom Mathematiklernen

Nicht von ungefähr gilt die Fähigkeit zum selbstgesteuerten und eigenverantwortlichen Lernen zu einem der zentralen Erziehungsziele der allgemeinbildenden Schule. Dies gilt umso mehr in einer sich immer schneller entwickelnden Wissensgesellschaft, in der sich Berufsbilder so schnell verändern, dass von jedem die Bereitschaft und Fähigkeit zu lebenslangem Lernen erwartet wird (Zu tieferen Analysen aus Sicht der Allgemeinbildung vgl. z.B. Friedrich 1999, Huber 2000).

Welchen Beitrag kann der Mathematikunterricht dazu leisten? Ein verzerrtes Bild vom selbstständigen Lernen sieht zuweilen so aus: „Mathematik ist ein Gefüge von Inhalten und Verfahren, die es zu erlernen gilt. Selbstständiges Lernen bedeutet, dass Schülerinnen und Schüler sich dieses Wissen mit Hilfe von Lernmaterialien selbst aneignen.“ Wir sehen vor unserem inneren Auge die Schülerinnen und Schüler die Definitionen und Verfahren in den Lehrbüchern studieren und ihre Anwendungen miteinander einüben. Ist das selbstständiges Lernen oder doch nur selbstständiges Pauken? Welche Qualitäten fehlen dem hier beschriebenen Lernen, obgleich es doch an Selbstständigkeit und Selbststeuerung orientiert zu sein scheint?

Selbstgesteuertes Lernen wird – aus einer fachübergreifenden Perspektive – als eine Form des Lernens beschrieben, bei dem

> „der Handelnde die wesentlichen Entscheidungen, ob, was, wann, wie und woraufhin er lernt, gravierend und folgenreich beeinflussen kann.“ (Weinert 1982, S. 102).

Gewiss ist der Einfluss des Lernenden in der Schule immer begrenzt durch curriculare und organisatorische Vorgaben, dennoch gibt es bei angemessener Auswahl von Aufgaben und methodischer Gestaltung durchaus die Möglichkeit für den Lernenden, sein Lernen *„folgenreich zu beeinflussen“*. Das Missverständnis der eben umrissenen verkürzenden Auffassung vom selbstständigen Lernen ist auch ein Ausdruck eines verzerrten Bildes von Mathematik.

Selbstständig Mathematik lernen bedeutet nämlich keinesfalls, fertige Wissensbestandteile zu übernehmen und anzuwenden, sondern Mathematik individuell und im Austausch mit anderen immer wieder neu zu erfinden. Selbstständiges Lernen braucht also offene und reichhaltige Probleme, die es den Lernenden erlauben, Mathematik auf eigenen Wegen zu entdecken und zu erfinden.

Ein weiteres Missverständnis steckt im verzerrten Bild vom „Selbstlernen" (ich verzichte hier auf eine Diskussion der Bedeutungsnuancen zwischen selbstständigem, selbstgesteuertem und eigenverantwortlichem Lernen): Schülerinnen und Schülern stärkere Verantwortung für den Lernprozess zu geben ist nicht gleichzusetzen damit, sie mit dem Lernen allein zu lassen. Der Lehrer bzw. die Lehrerin sind immer noch Begleiter des Lernens, die stehen als kritische Diskussionspartner zur Verfügung, sie können motivieren, im Prozess heuristische Hilfen geben. Schließlich organisieren sie den Lernprozess aus der Vogelperspektive und sorgen dafür, dass die Ergebnisse zusammenkommen und für alle ertragreich werden, auch indem sie an geeigneter Stelle Wissen aus der „fertigen Mathematik" einbringen.

Was ist schließlich zu dem oft gehörten Einwand zu sagen, Schülerinnen und Schüler seien nicht in der Lage selbstständig zu lernen und bräuchten eher Anleitung. Natürlich müssen die Lernenden ihre Fähigkeiten, selbstständig zu lernen, erst nach und nach erwerben. Dies können sie jedoch nur, wenn sie auch Gelegenheiten dazu erhalten. Selbstständiges Lernen ist also Ziel und Voraussetzung zugleich. Einen sinnvollen Einstieg für Schülerinnen und Schüler sollte man daher möglichst früh suchen und Zutrauen in die Fähigkeiten mitbringen.
Selbstständiges Lernen heißt nicht notwendig *individuelles* Lernen, Selbstständigkeit kann und soll sich in der Schule auch beim kooperativen Arbeiten entfalten. Geeignete Arrangements und Aufgaben finden sich einem eigenen Beitrag zu Modul 8 („Mit Aufgaben Kommunikation und Kooperation im Mathematikunterricht fördern – fachliches und soziales Lernen miteinander verbinden"). Der vorliegende Text ist allerdings unabhängig von der Erläuterung zu Modul 8 zu lesen und enthält daher auch einige wenige Dopplungen.

In den nun folgenden Teilen sollen praktische Beispiele für die Gestaltung selbstständigen Lernens im Mathematikunterricht der Sekundarstufe dargestellt werden. Dabei handelt es sich sowohl um konkrete Aufgaben als auch Hinweise auf eine angemessene Unterrichtsgestaltung – beide Aspekte, die Unterrichtskultur und die Aufgabenkultur, bedingen sich naturgemäß gegenseitig.[1]

2. Problemlösendes Erarbeiten von Begriffen

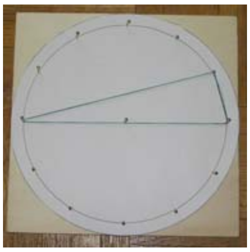
„Können Schülerinnen und Schüler eigene Entscheidungen treffen?" Dies sollte eine Kernfrage bei der Konstruktion von Lernsituationen sein, die von sich sagen, sie förderten selbstständiges Lernen. Kaum eigene Entscheidungen treffen sie, wenn ein neuer mathematischer Begriff durch Nachlesen im Schulbuch oder im fragend-entwickelnden Gespräch „eingeführt" wird. Die Begriffserarbeitung im Unterrichtsgespräch ist gleichsam der Tod des selbstständigen Lernens. Nur wenige Schüler werden aktiviert, alle sind mehr damit beschäftigt, zu erahnen, worauf die Lehrkraft hinaus will.

[1] Weitere, vertiefende Aspekte zur Theorie und Praxis des Selbstlernens im Mathematikunterricht findet man z.B. bei Hußmann (2002, 2005) und bei Fröhlich/Hußmann (2005).

Beispiel: Die Lehrkraft lässt Schülerinnen und Schüler in einen Kreis an der Tafel verschiedene Dreiecke über dem Durchmesser einzeichnen und den Winkel am Kreisumfang messen. Ein Schüler entdeckt, dass immer 90° Grad herauskommen. Die Beobachtungen wird als Vermutung notiert und mit der ganzen Klasse ein Beweis erarbeitet.

Nun reicht es nicht, die Entdeckung einfach in eine Aufgabe zu verpacken, bei der Schülerinnen und Schüler gleichsam auf einer Autobahn zur Lösung geführt werden – die Selbstständigkeit ist dann nur scheinbar gegeben, Raum für Entscheidungen gibt es nicht:

Beispiel: Spanne auf dem Geobrett Dreiecke, die alle als Grundseite die Verbindung von „3 (Uhr) zu 9 (Uhr)“ haben. Miss die Winkel, die bei C auftreten. Wie ändern sich die Winkel bei C, wenn die Grundlinie nun von 3 zu 8 verläuft?



In dieser Erarbeitungsvariante die Schüler zwar individuell handeln, dennoch entdecken sie nur die zuvor versteckten Zusammenhänge und arbeiten ein Programm ab, ohne Entscheidungen treffen zu können.

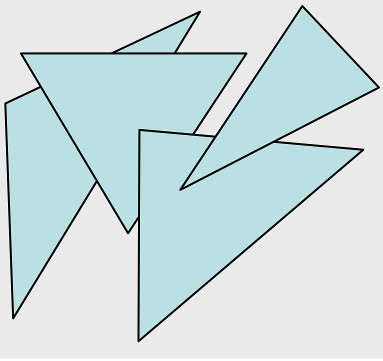
Wenn aber die Lernsituation durch ein hinreichend offenes Problem initiiert wird, wenn sich Schülerinnen und Schüler von Anfang an individuell (oder in kleinen Gruppen) aktiv mit der Situation auseinandersetzen können, so besteht nicht nur die Chance, dass sie ihre Lernwege selbst bahnen. Zugleich werden sie zu problemlösendem Arbeiten und zum Argumentieren angeregt.

Beispiel:

(1) Spanne das Gummiband (aus dem vorigen Beispiel) so, dass möglichst viele verschiedene Dreiecke entstehen. Sammle die Dreiecke, untersuche ihre Winkel und sortiere sie nach Gruppen. Stelle möglichst viele Vermutungen auf. Überprüfe und begründe sie, wenn möglich.

(2) Lege möglichst viele neue Dreiecke mit jeweils zwei von den Dreiecken (aus der Abb.). Untersuche die Winkel. Stelle möglichst viele Vermutungen auf. Überprüfe und begründe sie, wenn möglich.

(3) Welche Zusammenhänge zwischen Problem (1) und Problem (2) kannst du entdecken?



In dieser letzten Fassung können Schülerinnen und Schüler Konfigurationen untersuchen und Zusammenhänge entdecken, der Satz des Thales ist nur einer darunter. Die Bearbeitung benötigt mehr Zeit, dafür aber machen die Schülerinnen und Schüler vielfältige Erfahrungen mit Winkelkonfigurationen und Winkelsummen im Dreieck. Sogar die Beweisfigur für den Thalessatz und die nötigen Winkelbeziehungen haben sie bereits selbstständig erkundet.

In der hier geforderten Offenheit steckt ein typisches Paradox des selbstständigen, entdeckenden Lernens: Einerseits möchte man Lernprozesse für individuelle Wege öffnen, anderseits soll der Lernprozess dennoch an gewissen inhaltlichen Zielen orientiert sein. Kann man denn Aufgaben öffnen und zugleich sichern, dass alle das erwünschte Ziel erreichen? Diese Situation ist nur auf den ersten Blick paradox, wie das letzte Aufgabenbeispiel gezeigt hat: Es gibt Problemsituation, die viele Wege zulassen und dennoch gezielt auf mathematische Begriffsbildungen führen. Nicht alle Schülerinnen und Schüler müssen dabei denselben Weg beschritten haben, nicht alle müssen gleich weit dabei gekommen sein. Allein die aktive Beschäftigung mit einem Problemkontext aber macht es wesentlich wahrscheinlicher, dass ein Schüler einer weitergehenden oder alternativen Idee, die von außen, etwa von Mitschülern kommt, folgen kann.

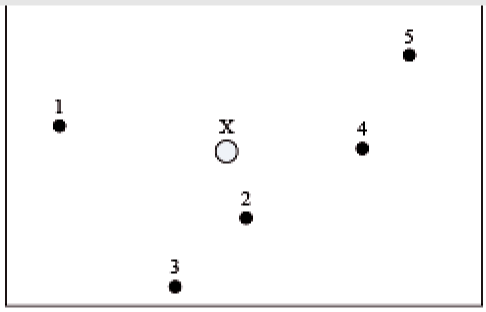
Das hier anklingende Prinzip ist das der „Problemorientierung“ bzw. „problemorientierten Begriffsbildung“ und ist ein Königsweg zur Forderung, Schüler sollen eigene Entscheidungen treffen und damit ihren Lernprozess eigenverantwortlicher gestalten. Geeignete Probleme müssen somit die folgenden Bedingungen zugleich erfüllen:

- Sie müssen mathematisch gehaltvoll sein, d.h. einen Begriff und seine Umgebung entdecken und erkunden lassen,
- Sie müssen für alle Schülerinnen und Schüler zugänglich sein, insbesondere sollen sie Bearbeitungen auf verschiedenen Komplexitäts-, Allgemeinheits- und Reflexionsniveaus zulassen.
- Sie müssen dazu hinreichend offen sein

Zugänglichkeit, Offenheit, Differenzierungsvermögen und mathematischer Gehalt sind also Eigenschaften, die geeignete Aufgaben für das problemorientierte Erarbeiten von Begriffen auszeichnen. Im Folgenden noch zwei weitere Beispiele.

Beispiel 1:
Wüstenbrunnen

Die Karte zeigt ein Stück Land. Es gibt fünf Brunnen in diesem Gebiet. Stelle dir vor, du stehst bei X mit einer Herde von Schafen, die Durst haben. Zu welchem Brunnen gehst du? Die Wahl war natürlich nicht schwierig. Du gehst zum nächstgelegenen Brunnen. Entwickle nun eine Einteilung des Landes in fünf Gebiete, so dass zu jedem Ort in einem Gebiet der Brunnen in diesem Gebiet der nächstgelegene ist.

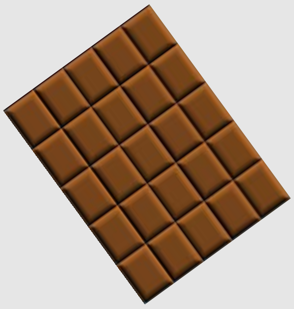


nach Goddijn/ Reuter (1995)

Dieses Problem führt beinahe zwangsläufig auf den Begriff der Mittelsenkrechten, ohne die Schülerinnen und Schüler auf ihrem Weg in eine bestimmte Richtung zu gängeln.

Beispiel 2:

Schokoladentafeln



Die Firma „*PRIMA-Schokolade*“ macht neuerdings Werbung mit dem Slogan „Die Schokolade für die ganze Familie“. Darauf bekommt sie einen Beschwerdebrief:

„Liebes Team von PRIMA-Schokolade: Wir sind eine Familie mit 5 Personen und eure Schokolade ist sicher nicht für uns gemacht. Jedes Mal gibt es Streit, weil beim gerechten Aufteilen ein Stück übrig bleibt.“

- Aus wie viel Stückchen könnte eine Tafel PRIMA-Schokolade wohl haben?
- Schreibt einen Brief an PRIMA-Schokolade, in dem ihr einen Vorschlag macht, wie viele Stücke eine Tafel haben soll, damit sich möglichst wenige Familien beschweren können.

Nach der Bearbeitung dieses Problems wird es keine Schwierigkeit sein, die Begriffe „Teiler“ und „Primzahl“ einzuführen – eigentlich sind sie ja schon erarbeitet, die Schüler verwenden nur in der Phase des selbstständigen Arbeitens nicht diese normierten Bezeichnungen.

3. Eigene Probleme finden

Die meisten Probleme des Mathematikunterrichts werden durch die Lehrkraft oder das Schulbuch gegeben. Schülerinnen und Schüler lösen fortwährend Probleme, die nicht ihre eigenen sind, oder positiver formuliert: die sie im Bearbeitungsprozess erst zu ihren eigenen machen müssen. Wie können Lernsituationen im Mathematikunterricht aussehen, dass Lernende selbst nicht nur über die Lernwege, sondern auch über die Lerninhalte mitentscheiden können?

Die Idealsituation ist hier wohl das **Projekt**. Die Mathematik kommt erst dann ins Spiel, wenn sie für das Projektziel relevant wird, etwa zur Vorausberechnung von Materialien, zur Konstruktion eines Objektes, zur Abschätzung der Wirtschaftlichkeit usw.

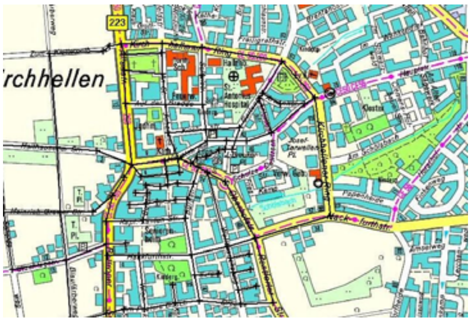
Die Mathematik zeigt hier einen tatsächlichen Nutzen, aber sie muss sich auch dem Projektziel unterordnen. Mitunter behilft sich der Mathematikunterricht auch durch Projekte, die von vornherein so angelegt sind, dass gewisse mathematische Probleme in Angriff genommen werden müssen, wie z.B. die folgenden „mathematischen Projekte“

Beispiel:

Im Zuge einer Werbeaktion für eine Schule soll eine Klasse an einem fächerverbindenden Projekt (Mathematik, Physik und Kunst) beteiligt werden. Der Auftrag für die Klasse ist, die Platonischen Körper in Form von (Modell) Heißluftballonen in die Lüfte steigen zu lassen. (Ludwig 2001)

Beispiel: Routenplaner für Fußgänger

Jeder kennt heutzutage Routenplaner oder hat bereits einen befragt – z.B. im Internet unter map24.de. Indem Schüler einen solchen Routenplaner selbst planen und erstellen, entwickeln und entdecken sie Modellierungen und Algorithmen der diskreten Mathematik. (Leuders 2005c)



Ein Projekt ist also einerseits die ideale Verwirklichung selbstgesteuerten Lernens, andererseits kann sich systematisches fachliches Lernen nicht vollständig im Projektlernen entfalten.

In Projekten können Schülerinnen und Schüler die Grunderfahrung machen, dass Mathematik ein nützliches Werkzeug bei der Bewältigung von Situationen im Alltag und in unserer Umwelt ist (Winter 1995). Mathematik erschöpft sich aber nicht in ihren Anwendungen, sie ist ebenso eine Wissenschaft, die sich mit rein gedanklichen Strukturen befasst, logische Zusammenhänge erkundet und dabei einen eigenen, deduktiv geordneten Begriffsapparat entwickelt. Schülerinnen und Schüler müssen von diesen mathematischen Prozessen nicht ausgeschlossen sein, gleichsam als Beobachter und Rezipienten einer fertigen Wissenschaft, sondern können aktiv forschend die Grunderfahrung machen, wie „reine Mathematik" funktioniert. Sie können nicht nur bewährte mathematische Begriffe wiederentdecken, sie können auch eigene Begriffe erfinden und ausloten. Sie können mathematische Situationen erkunden, eigene Vermutungen aufstellen und diese zu begründen versuchen. Sie können mathematische Probleme selbst finden und lösen. Kurz: Schülerinnen und Schüler können selbstgesteuert mathematisch forschen.

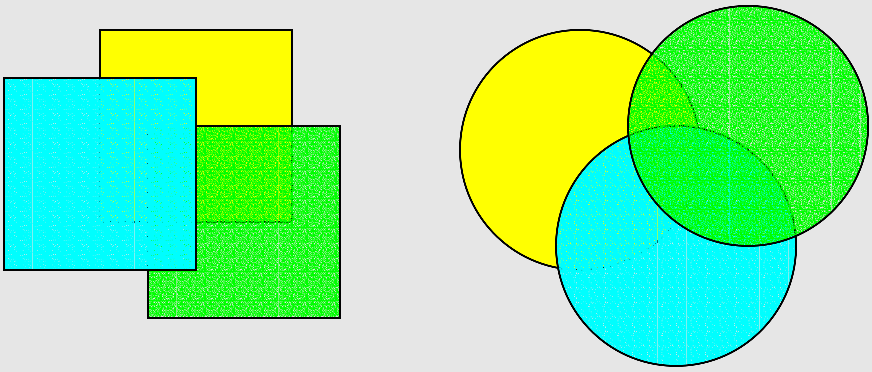
Hierzu geeignete „Forscheraufgaben" sind durch dieselben Eigenschaften gekennzeichnet wie die weiter oben beschriebenen Aufgaben zur problemlösenden Begriffsbildung. Was sie besonders auszeichnet, ist ihre radikale Offenheit: Es werden möglichst nur mathematische Situationen präsentiert und zum selbstständigen Formulieren von Fragestellungen oder Vermutungen angeregt. Die oben beschriebene Erforschung der Dreiecke, die am Kreis entstehen, passt somit bereits in diese Kategorie.

Beispiele:

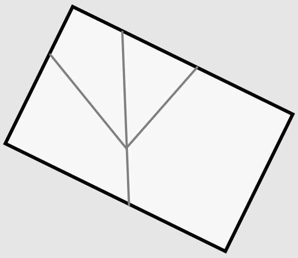
„Schulforschung"

a) Welcher Lehrer redet am meisten?
b) Wie viele Kilometer Weg legt ein Lehrer im Schulgebäude pro Tag zurück?
c) Was ist eigentlich schwerer? Alle Lehrerinnen und Lehrer der Schule zusammen? Oder alle Schülerinnen und Schüler? Oder alle Schulbücher in der Schule? Oder alle Tische und Stühle?
d) Denkt euch eigene Fragen aus, die ihr erforschen könnt.

Stell dir eigene Aufgaben, bei denen es darum geht, auf welche Weise sich Figuren schneiden. Also z.B. wie oft sie sich schneiden, welche Anzahl oder Form die Schnittgebilde haben usw. Nimm Kreise, Rechtecke, … wie immer du willst.

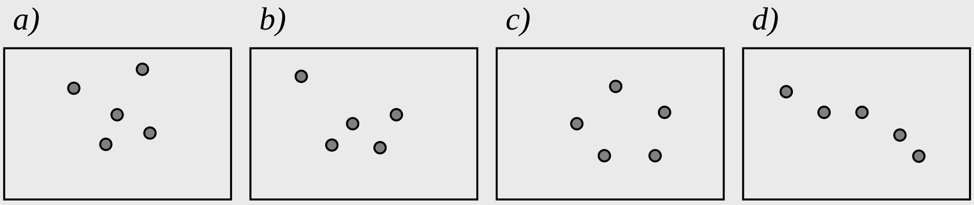


Falte ein DIN A4-Blatt einmal, zweimal oder dreimal. Finde dann möglichst viele Beziehungen zwischen den Winkeln.



Viele weitere solcher Fragen findet man in Form „ergebnisoffene Aufgaben“ unter dem Titel *open ended problems* (Becker/Shimada 1997), wie z.B. das folgende

Drei Schüler werfen mit Murmeln und haben vereinbart: Es gewinnt derjenige, dessen fünf Murmeln am wenigsten weit auseinander liegen bleiben. Immer wieder streiten sie sich darüber, wer gewonnen hat. Wie kann man den Grad, wie stark die Murmeln streuen, messen oder berechnen? Erfinde ein „Maß für die Streuung“.
In den Abbildungen a), b) und c) siehst du ein Wurfergebnis von jedem der drei Schüler. Entscheide mit deinem Maß, wer gewonnen hat!



Aufgaben wie diese erscheinen ungewohnt, man findet sie nur in ausgesprochen innovativen Schulbüchern. Schülerinnen und Schüler müssen erst mit der Tätigkeit vertraut werden, dass sie selber mathematische Fragen stellen können und dürfen. Einen „sanfter Weg“ hin zu solcher „eigentätigen Forschung“ weist eine Idee, die seit einigen Jahren von vielen Lehrerinnen und Lehrern praktiziert wird: Die Aufgabenvariation, wie sie vor allem Schupp (2002) vorschlägt und anhand vieler Beispiele ausführt. Das Prinzip ist einfach: *Nach* der Lösung eines Problems, dem Beweis einer Vermutung, der Berechnung einer Größe oder der Konstruktion einer Figur, bittet man Schülerinnen und Schüler, die Ausgangssituation zu variieren und erneut anzusetzen, und zu fragen: „Was wäre wenn…?“

Beispiel: Nachdem Schülerinnen und Schüler herausgefunden haben, wie man am besten vier gleiche Kreise mit möglichst großer Gesamtfläche aus einem Quadrat schneidet, variieren sie die Frage. Eine einfache Technik besteht darin, einzelne Worte aus der Problemstellung durch andere zu ersetzen. Die neuen Probleme könnten dann z. B. lauten:

1. *Schneide aus einem Quadrat vier* ***beliebige*** *Kreise mit möglichst großer Gesamtfläche aus.*
2. *Schneide aus einem* ***Rechteck*** *vier gleiche Kreise mit möglichst großer Gesamtfläche aus.*
3. *Schneide aus einem Quadrat* ***drei*** *gleiche Kreise mit möglichst großer Gesamtfläche aus.*
4. *Schneide aus einem* ***Kreis*** *vier gleiche Kreise mit möglichst großer Gesamtfläche aus.*
5. *Schneide aus einem Kreis vier gleiche* ***Quadrate*** *mit möglichst großer Gesamtfläche aus.*
6. *Schneide aus einem Quadrat vier gleiche Kreise mit möglichst großem* ***Gesamtumfang*** *aus*
7. *Schneide aus einem Quadrat* ***beliebig viele, auch verschieden große*** *Kreise mit möglichst großer Gesamtfläche aus.*

Der Auftrag an Schüler lautet also nicht „Löse das Problem“, sondern: „Variiere selbst das Problem und untersuche, was passiert“. Lehrerinnen und Lehrer können zwar vorab ausloten, welche Variationen zu erwarten sind. Eine detaillierte Planung wird jedoch dadurch unmöglich, dass Schülerinnen und Schüler immer wieder Naheliegendes unbeachtet lassen, dafür aber auf Unerwartetes stoßen. Die von ihnen erfundenen Variationen können sehr unterschiedliche Schwierigkeitsgrade aufweisen, wenn man sich an ihre Bearbeitung macht. Manche erweisen sich als trivial, manche führen auf curricular zentrale Themen, andere sind mit Mitteln der Schulmathematik kaum erfolgreich anzugehen. Diese Schilderung deutet schon darauf hin, dass das Arbeiten mit der Variationstechnik für Lehrerinnen und Lehrer interessanter, aber auch anspruchsvoller ist als das Lösenlassen wohlüberlegt ausgesuchter „fertiger“ Probleme.

Viele der entstehenden Variationen lassen sich als Nachbarprobleme oder Analogien, als Verallgemeinerungen oder Spezialisierungen, als Ober- oder Unterbegriffe identifizieren. Bei der Untersuchung der Variationsergebnisse erkunden Schülerinnen und Schüler dann logische Beziehungen und Begriffsrelationen. Diese Reflexionsebene erreichen sie jedoch erst, *nachdem* sie einige Erfahrungen mit Variationen haben. Auch das Probleme *Finden* kann man nach und nach durch Strategien unterstützen, z.B. durch die folgenden

Wackeln: **„**Nimm geringfügige Veränderungen vor“
Analogisieren: **„**Ändere oder ersetze eine Bedingung“
Verallgemeinern: **„**Lasse Informationen oder Bedingungen weg“
Spezialisieren: **„**Füge zusätzliche Bedingungen hinzu“
Kombinieren: **„**Führe mit einer anderen Situation zusammen“.

4. Unterrichtsformen, die Selbststeuerung erfordern und fördern

Bislang gingen die Beispiele zur Förderung selbstgesteuerten Lernens immer von bestimmten Aufgabentypen aus. Im Folgenden sollen nun umgekehrt einige Unterrichtsformen, die dem selbstständigen Lernen und dem Lernen von Selbstständigkeit förderlich sind, dargestellt werden. Diese Formen brauchen ihrerseits natürlich wieder geeignete Aufgaben.

Die **Stationenarbeit** und ihre vielfältigen Varianten (Lerntheke, Lernzirkel etc.) werden vor allem geschätzt, da hier Schülerinnen und Schüler mit unterschiedlichem Lerntempo und Lernvoraussetzungen sich mit einem Thema auf verschiedenen Zugängen befassen können. Selbstständigkeit wird dabei vor allem dadurch gefördert und gefordert, dass Schülerinnen und Schüler ihren Lernprozess eigenverantwortlich planen und reflektieren. Diese Vorzüge kommen aber nur dann zum Tragen, wenn sie nicht durch Defizite in anderen Bereichen zunichte gemacht werden, wenn die Stationen nicht geeignet sind, dass Schülerinnen und Schüler tatsächlich breite und ausbaufähige Erfahrungen zu einem Themenbereich machen können. Beschränkt sich das Arbeiten an Stationen etwa auf gefälliges Spielen oder auf andere irrelevante oder oberflächliche „Beschäftigungen“ mit dem Thema, so wird viel Lernzeit auf Seiten der Schüler und Vorbereitungszeit auf Seiten der Lehrkraft verschwendet (vgl. Sundermann/Selter 2000). Will man ernstlich erreichen, dass Schülerinnen und Schüler im Rahmen der Stationenarbeit ihre Lernwege bewusst planen, so muss man sie durch geeignete Orientierungen dabei unterstützen, z.B. durch „Laufkarten“, die explizit machen, welche Aspekte eines Themas an den Stationen erarbeitet werden. Analoges gilt für die noch offeneren methodischen Anlagen des Unterrichts in Form von **Wochenplanarbeit** und **Freiarbeit**. Da die Selbstständigkeit hier im Wesentlichen unabhängig von den Spezifika des jeweiligen Faches gefördert wird, soll an dieser Stelle die Diskussion nicht weiter vertieft werden. Viele weitere Anregungen findet man in der allgemeindidaktischen Literatur. Einige Beispiele für Stationenarbeit im Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I gibt z.B. Heske (2001, 2003).

Ein expliziter Anlass für das selbstständige Arbeiten ist die Facharbeit in der gymnasialen Oberstufe. Oft genug sind Schülerinnen und Schüler vor große Schwierigkeiten gestellt, wenn sie diese Arbeitsform erst so spät kennen lernen. Auch im Fach Mathematik sollte es daher schon von früh an **mathematische Hausarbeiten** geben, also Fragen, die individuell und über einen längeren Zeitraum bearbeitet werden sollen und an deren Ende eine Ausarbeitung oder ein Vortrag steht. Nicht nur das Abarbeiten von recherchierbaren Themen – wie etwa die Biographie eines Mathematikers – sondern auch Aufträge, die mit individueller kreativer Auseinandersetzung verbunden sind, sollten gestellt werden, wie z.B.

> *Die Fußball-WM steht bevor – was kannst du vorweg mathematisch bestimmen? (z.B.: Anzahl aller verkauften Karten, Gewinn aus dem Kartenverkauf, Benzinverbrauch für den Besuch eines Spiels, zusätzliche Bettenkapazitäten usw.)*

Elektrische Geräte im Haushalt verbrauchen im standby-Modus auch Energie. Ermittle für den Haushalt deiner Familie die jährlichen Kosten. Stelle die volkswirtschaftlichen Folgen anschaulich dar. Wozu lässt sich hierbei Mathematik anwenden?

Untersuche die Wortlängen in verschiedenen Presseerzeugnissen. Welche Fragen könnte man stellen und näher untersuchen?

Zeichnet man in ein Rechteck, das aus n x m Kästchen besteht, eine Diagonale, so durchkreuzt sie eine bestimmte Anzahl von Kästchen. Untersuche, wie man diese Anzahl aus n und m berechnen kann.

Wie man sieht, können auch innermathematische Probleme in selbstständiger Arbeit untersucht werden. Allen Problemen gemein ist, dass sie für alle Schüler zugänglich sind und auf unterschiedlichem Niveau bearbeitet werden können. Im Gegensatz zu den weiter oben beschriebenen Problemen braucht es hier jedoch einige Stunden der Befassung mit einer Fragestellung sowie gegebenenfalls auch eine Recherche von nötigem Datenmaterial.

In England gibt es „Kleinformen" von Facharbeiten, die *coursework* (Kursarbeiten) genannt werden. Die Schülerinnen und Schüler beginnen mit der Arbeit in der Klasse, können auf Rückfrage Unterstützung beim Einstieg in die Aufgabe erhalten, sich untereinander austauschen oder Lehrbücher zu Rate ziehen (Kaiser 2001, s. auch http://www.coursework.info/6/index.html). In Heimarbeit entsteht dann über mehre Stunden ein Gesamtprodukt, bei dem jeder Schüler zumindest Teil- und Zwischenerfolge vorweisen kann.

Abschließend soll noch eine methodische Form beschrieben werden, die in besonderem Maße Schülerinnen und Schüler dazu anregt, ihre selbstständigen Lern- und Erkundungsprozesse zu reflektieren. Das **Lerntagebuch** (auch Reisetagebuch, Lernjournal etc.) existiert in den unterschiedlichsten Formen und Ausprägungen. Gemeinsam ist allen jedoch, dass es darum geht, dem Lernenden ein Medium zu geben, in dem er die Prozesse seines individuellen Verstehens (oder auch Nichtverstehens) von Mathematik für sich selbst und ggf. auch für den Lehrenden festhalten kann. Es ist ein Instrument des „lauten Denkens", das zur Reflexion anhält und das dem Prozess des Erkundens ein besonderes Gewicht gibt. Für methodische Details sei auf Gallin/Ruf (1998), Hußmann (2003) oder Heske (2001) hingewiesen.

5. Ergebnisse selbstgesteuerten Lernens auswerten

Weit weniger Innovationsbewegung als beim selbstständigen Lernen findet man zurzeit im Bereich der Leistungsbewertung. Über viele Jahrzehnte hinweg hat sich im deutschen Schulsystem eine spezifische Tradition der Leistungsbewertung etabliert, die nur wenig Spielraum für alternative Ansätze lässt und die im deutschen Sekundarbereich fest gefügter denn je erscheint (Bartnitzky 1996, Arnold/ Jürgens 2001).

Die Anforderungen dieser beiden Dimensionen schulischer Lernorganisation, der Förderung von Selbstständigkeit auf der einen und der Bewertung von Schülerleistungen auf der anderen Seite, werden in der täglichen Schulpraxis oft als widersprüchlich wahrgenommen. Hinter diesen scheinbar nur schwer vereinbaren Anforderungen verbirgt sich letztlich eine klassische Paradoxie der Pädagogik: Der letzte Zweck einer Erziehung zur Mündigkeit ist es, den Erziehenden überflüssig zu machen. Heute würde man das eher so formulieren: Das Lernen in der Schule muss so organisiert, so „gesteuert" werden, dass es auf ein lebenslanges selbstgesteuertes Lernen vorbereitet. In der Tat handelt es sich hier um eine Herausforderung, der sich die pädagogische Gestaltung schulischen Lernens offen stellen muss.

Dies ist ein wesentlicher Grund, warum immer wieder das Trennen von Lernen und Leisten eingefordert wird, und zwar sowohl auf der organisatorischen Ebene (BLK 1997) als auch auf Ebene der Aufgaben (Büchter/Leuders 2005).

Wenn aber selbstständiges Lernen gefördert werden soll, dann reicht es nicht aus, diesem Freiräume zuzubilligen. Es müssen auch Verfahren weiterentwickelt und verbreitet werden, die in besonderem Maße geeignet sind die Qualität und die Ergebnisse selbstständigen Lernens zu bewerten. Einige Beispiele werden abschließend vorgestellt.

Will man die Schreibenden zu Leistungen herausfordern, bei denen sie ihre Individualität und Kreativität einbringen können, so muss die Aufgabenstellung möglichst offen hinsichtlich der möglichen Ergebnisse und der verwendbaren Methoden sein. Die Arbeit an solchen Problemen verläuft dann divergent und ist nur begrenzt vorhersehbar. Auch solche Arbeitsprozesse müssen gewürdigt werden – und nicht nur wie im Mathematikunterricht so oft die Richtigkeit der Ergebnisse. Ein Modell für ein erweitertes **Bewertungsschema** kann in etwa so aussehen (Leuders 2003, S.304):

Bewertungs-bereiche	Kreativität	Korrektheit
Gestaltung	interessante Darstellungsform, plastische Illustrationen	Klare äußere Form, übersichtliche Struktur
Nutzung von Mathematik	unerwartete Ansätze, Kombination von Ideen aus verschiedenen Bereichen, Neuschöpfungen	richtige Berechnungen, mathematische Aspekte des Themas konsequent verfolgt
Sprache	ausdrucksreiche und interessante Sprache, begriffliche Neuschöpfungen	sachlich richtige und schlüssige Argumentation, präzise Ausdrucksweise, korrekte Fachsprache
Gründlichkeit	Sonderfälle und Probleme erkannt, Reflexion von Alternativen („Was wäre wenn...")	Bearbeitung aller geforderten Aufgabenteile, ausführliche Rechnungen

Dieses Schema bietet einen transparenten Kriterienkatalog, der in dieser Form den Schülerinnen und Schülern auch im Vorhinein an die Hand gegeben werden kann und Anreize zu kreativen, individuellen Leistungen enthält. Es berücksichtigt die divergenten („Kreativität") und konvergenten („Korrektheit") Aspekte der Leistung gleichermaßen.

Eine besondere Form, in der Schülerinnen und Schüler die Ergebnisse ihres selbstständigen Lernprozesses vorlegen können, ist das so genannte **Portfolio**. Das ist eine strukturierte Sammlung von Dokumenten unterschiedlicher Art und von Beispielen persönlicher Arbeiten, die von den Lernenden zusammengestellt wird und die sie immer wieder ergänzen und aktualisieren. Der Begriff „Portfolio" lässt sich lapidar mit „Sammelmappe" übersetzen. Außerhalb des Schulkontextes versteht man darunter die Bewerbungsmappe von Künstlern oder ein Bündel von Wertpapieren. Im Mathematikunterricht spielt das Portfolio (im Gegensatz zum Lerntagebuch) bislang keine Rolle. Dies liegt wohl vor allem daran, dass Lernerfolg und

Lernfortschritt immer noch an der Erfüllung externer, einheitlicher und überindividueller Normen gemessen wird. Das Portfolio kann als „produktive Repertoireergänzung" für die Leistungsbewertung verschiedene Funktionen erfüllen und die traditionelle Bewertungsperspektive bereichern:

Portfolios können detailliertere inhaltliche Auskünfte über individuelle Leistungen geben als summierende Noten, die eher die Summe des kurzfristigen Lernerfolges in Klassenarbeiten dokumentieren. Portfolios geben insbesondere Raum für individuelle gestalterische Tätigkeit. Hierzu können gehören:

- Texte über das eigene Erleben von Mathematik, z.B. Schlüsselerlebnisse, auch „interkulturelle Begegnungen" außerhalb des Unterrichts: „Wo ist mir Mathematik entgegengetreten?"
- Texte, die im Zusammenhang mit Unterrichtsthemen entstanden sind, z.B. Leserbriefe an eine Zeitung.
- Künstlerisch ausgestaltete Arbeiten: Bilder, Zeichnungen, die mathematikhaltig sind oder einen mathematischen Sachverhalt augenfällig illustrieren.
- Individuell angefertigte Arbeiten aus einem längeren Lernzeitraum (Facharbeit, längere Hausarbeit, Referat, Internetseite, usw.)

Solche Produkte dokumentieren mehr als nur die Erfüllung von außen aufgetragener Pflichten und werden vom Lernenden als sinnstiftend empfunden. Das Portfolio erlaubt so eine „Besinnung auf die eigentlichen Ziele des Mathematikunterrichts", auf „schöpferische, begründende und beurteilende Fähigkeiten" (Herget 1996).

Was kann alles in einem Mathematik-Portfolio gesammelt werden?

Ausgewählte Materialien aus dem Arbeitsprozess
- *wichtige Arbeitsblätter*
- *ausgewählte und bewertete Fundstücke aus dem Internet oder aus Zeitschriften.*
- *Kernmomente: Aha-Erlebnisse, wichtige Ideen und Einsichten (z.B. aus den Lerntagebucheintragungen)*
- *zentrale eigene (offene) Fragen / Thesen*
- *Zwischenzusammenfassungen, Mind Maps*

Besondere eigene Arbeiten und Produkte
- *selbst ausgedachte Aufgaben, eigene Lösungen*
- *besondere Darstellungen, z.B.:*
    - *geometrische Illustrationen, Skizzen*
    - *Erläuterung schöner Begründungen und Beweise*
    - *originelle Anwendungen, Weiterführungen, Verallgemeinerungen*
    - *Kurzvorträge (Folien), Referate, individuelle Hausarbeiten*

In jedem Fall dürfen die Materialien nicht unkommentiert gesammelt werden, sondern müssen überarbeitet, strukturiert und durch persönliche Bewertungen und Kommentare eingeordnet werden. Es muss klar werden, was aus welchem Anlass oder mit welchem Ziel aufgenommen wurde.

Strukturierende Elemente
- *Übersicht über wichtige Begriffe,*

z.B. in Form von Skizzen oder Begriffslandkarten
- *Glossar*
- *Inhaltsübersicht*
- *Gestaltete Titelseite*

Auswertung des Gesamtproduktes
- *Selbstbeurteilung*
- *ggf. Dokumente der Lehrerbeurteilung*
- *Ausblick auf den weiteren Arbeitsprozess*

An der Entscheidung, welche Teile aufgenommen werden, sind Lernende wesentlich mitbeteiligt. Portfolios können – altersgemäß gestaltet – bereits frühzeitig eingeführt und genutzt werden und bieten Anlässe zu einer Stärkung selbstständigen Lernens.

Weitere Hinweise zum Portfolio und zu Verfahren der Auswertung von selbstständigem Lernen finden Sie bei Winter (1996) oder bei Leuders (2003, 2004).

Literatur

Arnold, K.-H. / Jürgens, E. (2001): Schülerbeurteilung ohne Zensuren. München.
Bartnitzky, H. (1996): Ohne Noten oder mit Noten. In: Bambach u.a. (Hsrg.) Prüfen und Beurteilen, Friedrich Jahresheft XIV
Becker, J.P. / Shimada, S. (Hrsg.) (1997): The open-ended approach: a new proposal for teaching mathematics. Reston VA: NCTM
BLK (1997) Expertise „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts". Bonn: Bund-Länder-Kommission (http://www.blk-bonn.de/download-blk.htm)
Friedrich, H.F. (1999): Selbstgesteuertes Lernen – sechs Fragen, sechs Antworten. Soest: Landesinstitut für Schule und Weiterbildung
Fröhlich, I./ Hußmann, S. (2005): Selber lernen macht schlau – Selbstlernen Schritt für Schritt. Praxis der Mathematik im Unterricht 1/05
Gallin, P. / Ruf, U. (1998): Dialogisches Lernen im Mathematikunterricht. Seelze: Kallmeyer
Goddijn, A.J./ Reuter, W. (1995): Afstanden, grenzen en gebiedsindelingen (Nieuwe wiskunde tweede fase). Freudenthal Instituut
Herget, W. (1996): Die etwas andere Mathe-Aufgabe. Der Lösungsvielfalt gerecht werden. . In: Bambach u.a. (Hsrg.) Prüfen und Beurteilen, Friedrich Jahresheft XIV
Heske, H, (2001): Lernen an Stationen im Mathematikunterricht. Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 54, S. 398-401.
Heske, H. (2001). Lerntagebücher. Eine Unterrichtsmethode, die das Selbstlernen im Mathematikunterricht fördert. mathematik lehren 104
Heske, H. (2003): Ganzheitliches Lernen. In: Leuders, T. (Hrsg.): Mathematik-Didaktik. Berlin: Cornelsen Scriptor
Huber, L. (2000): Selbstständiges Lernen als Weg und Ziel. In: L. Huber/K. Schäfer-Koch (Red.): Förderung des selbstständigen Lernens auf der gymnasialen Oberstufe. Bönen (Reihe Curriculum; hrsg. vom LSW), 9-37.
Hußmann, S. (2002): Mathematik entdecken und erforschen in der Sekundarstufe II - Theorie und Praxis des Selbstlernen in der Sekundarstufe II. Berlin: Cornelsen Scriptor
Hußmann, S. (2003): Lerntagebücher in der Sprache des Verstehens In: Leuders, Timo: Mathematikdidaktik. Berlin: Cornelsen Scriptor

Hußmann, S. (2004). Selbstgesteuertes Lernen im Mathematikunterricht (Hg.). Der Mathematik-Unterricht. Seelze: Friedrich-Verlag, 2004.

Kaiser, G. (2001): Coursework - alternative Form der Leistungsmessung. Anregungen für Facharbeiten aus England und Australien. mathematik lehren, Heft 107, 15-18.

Leuders, T. (2003): Mathematikunterricht auswerten. In: Leuders (Hrsg.) Mathematik-Didaktik. Berlin: Cornelsen Scriptor, 292-322

Leuders, T. (2004): Selbstständiges Lernen und Leistungsbewertung. Der Mathematikunterricht 3/04

Leuders, T. (2005). Ein Routenplaner für Fußgänger. In: Pallack/ Leuders (Hrsg.) Materialien für einen projektorientierten Mathematik- und Informatikunterricht, Band 2. Hildesheim: Franzbecker

Ludwig, M. (2001): Projekte im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht, Hildesheim: Franzbecker

Schupp, H. (2002): Thema mit Variationen. Aufgabenvariation im Mathematikunterricht. Hildesheim, Berlin: Franzbecker

Sundermann, B./ Selter, Ch. (2000): Quattro Stagioni – Nachdenkliches zum Stationenlernen aus mathematikdidaktischer Perspektive. Friedrich Jahresheft: Üben und Wiederholen, 2000, 110-113

Weinert, F.E. (1982). Selbstgesteuertes Lernen als Voraussetzung, Methode und Ziel des Unterrichts. Unterrichtswissenschaft, 10 (2), 99-110.

Winter, F. (1996): Schülerselbstbewertung. Die Kommunikation über Leistung verbessern. In: Bambach u.a. (1996) S. 34-37

Winter, H. (1995): Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 61, 37–46