

# Zufall und Wahrscheinlichkeit in der Grundschule

Dr. Bernd Neubert, Uni Gießen

15. Tage des mathematischen und  
naturwissenschaftlichen Unterrichts

Erfurt 12./13.3.2009

„Auch der Zufall ist nicht unergründlich, er hat eine  
Regelmäßigkeit.“

(NOVALIS 1797)

# Entstehung der Stochastik

- CHEVALIER DE MÉRÉ:
- Werfen dreier symmetrischer Spielwürfel
- Annahme: Chance für das Auftreten der Augensummen 11 und 12 ist gleichgroß
- Beobachtung: Augensumme 11 fällt häufiger als Augensumme 12

## Augensumme 11

6 – 4 – 1	6
6 – 3 – 2	6
5 – 5 – 1	3
5 – 4 – 2	6
5 – 3 – 3	3
4 – 4 – 3	3

## Augensumme 12

6 – 5 – 1	6
6 – 4 – 2	6
6 – 3 – 3	3
5 – 4 – 3	6
5 – 5 – 2	3
4 – 4 – 4	1

# Zum Begriff „Stochastik“

- „Stochastik“ (ursprünglich): die Kunst des vernünftigen Vermutens, und zwar des vernünftigen Vermutens in den für menschliches Leben offensichtlich so typischen Situationen, in denen es an sicherem und zureichendem Wissen mangelt.
- „Kunst des Vermutens“ (lat.: *Ars conjectandi*) lautet auch der Titel eines der frühesten Werke zur Stochastik von JAKOB BERNOULLI (1654 - 1705).

# Entstehung der Stochastik

- eng mit Überlegungen zum Ausgang von Glücksspielen verbunden.
- CHEVALIER DE MÉRÉ: Glücksritter und Spieler
- schlechte Spielerfahrungen
- Korrespondenz mit dem Mathematiker BLAISE PASCAL (1623 - 1662), die als Geburtsstunde der Wahrscheinlichkeitsrechnung angesehen werden kann.

# Teilgebiete der Stochastik

- Wahrscheinlichkeitsrechnung
- Statistik
- (Kombinatorik)

# Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung

- Spricht man von Wahrscheinlichkeiten, so erfolgt dies immer im Zusammenhang mit irgendwelchen Ereignissen, die unter bestimmten Bedingungen eintreten können, aber nicht eintreten müssen, bei denen also mehrere Ausgänge möglich sind.
- Solche Ereignisse werden als **zufällige Ereignisse** bezeichnet.
- Wahrscheinlichkeit: Maß für das Eintreten von Ergebnissen bei Zufallsversuchen

# Zufallsexperiment

- Zufällige Ereignisse entstehen als Ergebnis von **Zufallsexperimenten** (zufälligen Versuchen).
- Bedingungen für ein **Zufallsexperiment:**
  - 1. Das Experiment ist beliebig oft unter den gleichen Bedingungen durchführbar.
  - 2. Die Ausgänge sind eindeutig angebbar.
  - 3. Es ist nicht vorhersagbar, welcher Ausgang des Experiments eintritt.

# Beispiele für Zufallsexperimente

- Werfen einer Münze
- Würfeln mit einem (idealen) Spielwürfel
- Drehen an einem Glücksrad
- Entnehmen von Kugeln aus einer Urne
- Spielsituationen
- Simulationen mit dem Computer

# Unmögliches Ereignis - sicheres Ereignis

- Ist ein Ereignis  $E$  gleich der leeren Menge, d. h.  $E$  kann niemals eintreten, so spricht man von einem **unmöglichem Ereignis**.
- *Beispiel:* das „Würfeln einer 7“ mit einem herkömmlichen Spielwürfel.
- Enthält ein Ereignis  $E$  umgekehrt alle möglichen Ergebnisse des Ergebnisraumes, so tritt  $E$  mit Sicherheit ein. In diesem Fall spricht man von einem **sicheren Ereignis**.
- *Beispiel:* das „Würfeln einer Zahl von 1 bis 6“.

# Der klassische Wahrscheinlichkeitsbegriff

- Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff 1812
- PIERRE SIMON MARQUIS DE LAPLACE (1749 - 1827)
- Laplace-Wahrscheinlichkeit
- gilt aber nur für **gleichwahrscheinliche Elementarereignisse**:
- alle Ergebnisse haben die gleiche Chance, dass sie eintreten können.
- *Beispiele:*
- Werfen einer Münze
- Würfeln mit einem fairen Würfel

# Klassische Definition der Wahrscheinlichkeit

## Wahrscheinlichkeit $P(E)$ eines Ereignisses $E$ :

$P(E) = \frac{\text{Anzahl der für } E \text{ günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse, sofern sie gleichmöglich sind}}$

$$P = \frac{|E|}{|\Omega|}$$

# Beispiele

- 1) Wahrscheinlichkeit für das Würfeln einer bestimmten Zahl  $i$  ( $i = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ ):

- $$P(E) = \frac{1}{6}$$

- 2) Wahrscheinlichkeit für das Würfeln einer geraden Zahl:

- $$P(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

- 3) Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim Werfen einer Münze „Zahl“ fällt:

- $$P(E) = \frac{1}{2}$$

# Wahrscheinlichkeit in der Grundschule?

- Gründe:
- Begründungsfeld 1: Stochastik trägt zur Umwelterschließung bei
- Begründungsfeld 2: Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs braucht Zeit
- Begründungsfeld 3: Interesse am Gegenstand (intrinsische Motivation)
- Begründungsfeld 4: Verbindlichkeit der Bildungsstandards

# Kompetenz: Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit

- **Wahrscheinlichkeiten in Zufallsexperimenten vergleichen**

Begriffe kennen: sicher; unmöglich; möglich, aber nicht sicher

Gewinnchancen bei einfachen Zufallsexperimenten (z. B. bei Würfelspielen) einschätzen

# Bildungsstandards

- **Beispiel: Würfeln (S. 34/35)**
- **3. Aufgabe:**
- Stell dir vor, du würfelst mit zwei Spielwürfeln.
- Bei jedem Wurf addierst du die gewürfelten Augenzahlen der beiden Würfel.
- Welche Summen sind möglich?
- Schreibe alle auf.
  
- **4. Aufgabe:**
- Beim Würfeln mit zwei Spielwürfeln wird die Summe 7 wesentlich häufiger gewürfelt als die Summe 12.
- Woran liegt das?

# Bildungsstandards

- **5. Aufgabe:**
- Du spielst mit einem Spielwürfel.
- Jeder der Spieler darf sich eine Regel aussuchen, nach der er seine Punkte bekommt.
  
- Du bekommst einen Punkt, wenn...
- Regel 1: **deine Zahl gerade ist**
- Regel 2: deine Zahl durch 3 teilbar ist
- Regel 3: **deine Zahl kleiner als 5 ist**
- Regel 4: **deine Zahl größer als 5 ist**
- Regel 5: **du die Null würfelst**

# Empfehlungen zur Gestaltung des Stochastikunterrichts in der Primarstufe

- kein eigenständiges Stoffgebiet
- Aspekt der den gesamten Mathematikunterricht durchzieht
- Integration in das Sachrechnen
- Vorerfahrungen der Schüler analysieren und aufgreifen
- den Schülern Möglichkeiten zu verschiedenen Lösungswegen geben
- den Schülern ein Vorgehen auf enaktiver Ebene anbieten

# Erfahrungen zu Wahrscheinlichkeiten

- **Aufgaben ohne Zufallsgeneratoren:**
  - Einschätzen, ob ein Ereignis zufällig ist oder nicht
  - Bewusster Umgang mit den Begriffen sicher, möglich, unmöglich
- **Aufgaben mit Zufallsgeneratoren:**
  - Einschätzen von Gewinnchancen

# Aufgaben zum Einschätzen, ob ein Ereignis zufällig ist oder nicht

(mit und ohne Zufallsgeneratoren)

## Aufgabe 1:

Lest die folgenden Sätze. Sind die darin beschriebenen Ereignisse zufällig oder nicht zufällig?

Kreuzt die Ergebnisse an!

- Papa hatte gestern beim Lotto „drei Richtige“.
- Michael hat sich beim Fußballspielen das Bein gebrochen.
- Bei 0°C gefriert Wasser.
- An der Nordseeküste gibt es regelmäßig Ebbe und Flut.
- Beim Werfen einer Münze wählt Uwe „Wappen“ und Ilka „Zahl“. Ilka gewinnt.
- 
- Thomas würfelt beim „Mensch-ärgere-Dich-nicht“ beim ersten Wurf eine 6.

## Aufgabe 2

- **Beim ersten Wurf erscheint „Zahl“. Was wird beim zweiten Wurf erscheinen?  
„Zahl“ \_\_\_\_\_ „Wappen“ \_\_\_\_\_  
Kann man nicht vorhersagen\_\_\_\_\_**
- **Kreuzt die Eurer Meinung nach richtige Antwort an.  
Könnt ihr euch nicht auf eine Meinung einigen, dann gebt beide Antworten an. Versucht zu begründen.**

## Aufgabe 3

- **Untersucht, welches der Ergebnisse wahrscheinlicher ist.**

**Begründet eure Entscheidung!**

## Aufgabe 3

### Aussage 1

- Alle Schüler der Klasse erledigen ihre Hausaufgaben ordentlich.
- Wenigstens die Hälfte der Schüler erledigt ihre Hausaufgaben ordentlich.

### Aussage 2

- Hans hat genau sieben Freunde.
- Hans hat mindestens drei Freunde.

### Aussage 3

- Wenn die große Schwester essen kocht, ist meistens alles angebrannt und versalzen.
- Wenn die große Schwester essen kocht, ist meistens alles angebrannt oder versalzen.

### Aussage 4

- Der Lehrer wird heute Lisa und Felix an die Tafel nehmen.
- Der Lehrer wird heute Lisa oder Felix an die Tafel nehmen.

### Aussage 5

- Martin macht im Diktat keinen Fehler.
- Martin macht im Diktat höchstens einen Fehler.

## Kann das sein?

- Unmöglich: trifft nie zu, kann niemals geschehen
- Möglich: kann schon ein, ist durchaus möglich
- Sicher: trifft immer zu, stimmt genau

## Kann das sein?

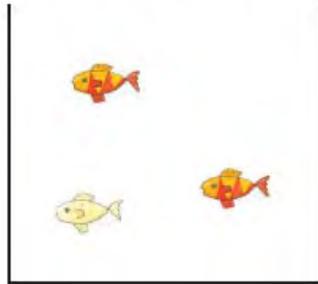
- a) Meine Mutter ist jünger als ich.
- b) Der Mond bewegt sich um die Erde.
- c) Morgen wird es schneien.
- d) Am 30. Dezember ist Silvester.
- e) Manchmal hat ein Monat nur 28 Tage.
- f) Eine Kuh fliegt über die Schule.
- g) Zwei Kinder einer Schule haben am gleichen Tag Geburtstag.
- h) Du würfelst mit einem Würfel eine 7.
- i) Du würfelst mit zwei Würfeln die Summe 6.
- j) Ein Rechteck hat zwei gleich lange Seiten.
- k) Ein Rechteck hat vier gleich lange Seiten.

# Fische angeln

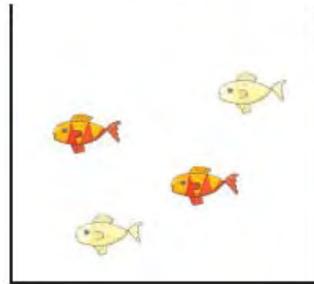
- Welche Sätze passen zu den jeweiligen Aquarien?
- 1. Es ist sicher, dass ein weißer Fisch geangelt wird.
- 2. Es ist sicher, dass ein schwarzer Fisch geangelt wird.
- 3. Es ist unmöglich, dass ein weißer Fisch geangelt wird.
- 4. Es ist unmöglich, dass ein schwarzer Fisch geangelt wird.
- 5. Es ist wahrscheinlich, dass ein weißer Fisch geangelt wird.
- 6. Es ist wahrscheinlich, dass ein schwarzer Fisch geangelt wird.
- 7. Es ist unwahrscheinlich, dass ein weißer Fisch geangelt wird.
- 8. Es ist unwahrscheinlich, dass ein schwarzer Fisch geangelt wird.
- 9. Es ist gleich wahrscheinlich, dass ein weißer oder schwarzer Fisch geangelt wird.

# Fische angeln

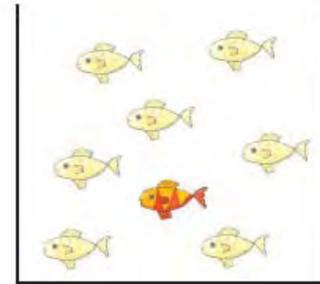
A



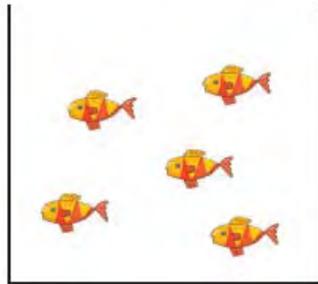
B



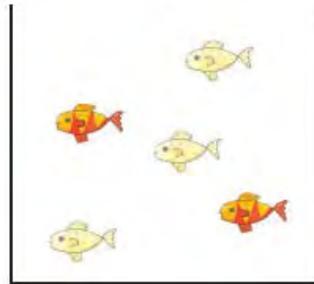
C



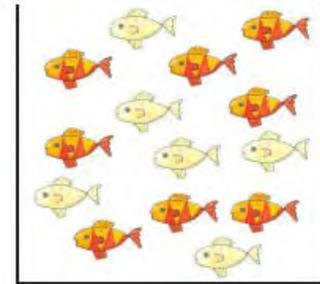
D



E



F



# Fische angeln

- Male passend zu den Sätzen Fische in die jeweiligen Aquarien.
- 1. Es ist sicher, dass ein schwarzer Fisch geangelt wird.
- 2. Es ist unmöglich, dass ein schwarzer Fisch geangelt wird.
- 3. Es ist wahrscheinlich, dass ein weißer Fisch geangelt wird.
- 4. Es ist unwahrscheinlich, dass ein weißer Fisch geangelt wird.
- 5. Es ist gleich wahrscheinlich, dass ein weißer oder schwarzer Fisch geangelt wird.

# Erfahrungen zu Wahrscheinlichkeiten mit Zufallsgeneratoren

- Am Anfang einfache Zufallsexperimente mit „gleichwahrscheinlichen“ Zufallsgeneratoren:
- Ideale Münze
- Fairer Würfel
- Glücksrad
- Urnenmodell
- Spielkarten

Ziel:

Einschätzen und Vergleichen von Wahrscheinlichkeiten und nicht das Berechnen von Wahrscheinlichkeiten

# Asymmetrische Zufallsgeneratoren

- Merkmal:
- Es liegt eine Ungleichverteilung der den möglichen Versuchsausgängen zugeordneten Wahrscheinlichkeiten vor.
  
- Beispiele:
- Reißzwecke
- „Gezinkter“ Würfel
- Urnen mit unterschiedlich großen Kugeln

# Zugänge zur Wahrscheinlichkeitsrechnung

- **Klassisch-kombinatorischer Weg:**  
Berechnung (Laplace-Formel)
- **Empirisch-statistischer Weg:** Schätzung  
aus Beobachtungen (relative Häufigkeiten)

# Ideale Münze

- relativ einfach zu durchschauen: nur „Kopf“ und „Zahl“
- Einsicht in die Zufälligkeit dieses Ereignisses vertiefen
- Frage für den Unterricht: „Was fällt häufiger Kopf oder Zahl?“
- Versuchsreihen mit größer werdender Anzahl (50 Würfe): Kinder können erkennen, dass Zahl und Kopf etwa gleich oft fallen, die Ergebnisse demnach gleichwahrscheinlich sind.
- Erkenntnis kann auch durch das einmalige Werfen entsprechend vieler Münzen erreicht werden.
- Mehrmaliges Werfen einer Münze: Herausarbeiten, dass man nicht vorhersagen kann, ob beim nächsten Wurf Kopf oder Zahl fällt.

# Fairer Würfel und andere platonische Körper

- Der Spielwürfel ist aus vielen Gesellschaftsspielen bekannt,
- spielt im Mathematikunterricht häufig von der ersten Klasse an eine Rolle (Würfeln von Rechenaufgaben, Untersuchungen am Würfel in der Geometrie)
- Unterscheiden zwischen dem Spiel mit einem Würfel und dem Spiel mit zwei Würfeln:
  - bei Spiel mit einem Würfel ist die Wahrscheinlichkeit für jede Zahl gleich,
  - beim Spiel mit zwei Würfeln sind die Wahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Würfelsummen unterschiedlich.

# Fairer Würfel

- Aufgabe 1: „Gibt es Würfelzahlen die häufiger fallen als andere?“
- Du kennst bestimmt die Regel des Spiels „Mensch, ärgere dich nicht!“, die sagt, dass man erst rausrücken darf, wenn man eine 6 würfelt.
- Ist es schwieriger eine 6 zu würfeln, als eine der anderen Zahlen?
- Kreuze an.
- Ja
- Nein
- Begründe deine Antwort!

# Fairer Würfel

- Aufgabe 2: Vergleich von Spielregeln
- Bei einem Spiel hast du die Möglichkeit, zwischen zwei Regeln zu entscheiden.
- Regel 1: Du gewinnst, wenn du eine Sechs würfelst.
- Regel 2: Du gewinnst, wenn du eine Zwei würfelst.
- Für welche Spielregel würdest Du Dich entscheiden?
- Begründe Deine Antwort!

# Fairer Würfel

- Aufgabe 3:
- Bei einem Spiel darf jeder nach einer anderen Regel rausrücken. Du sollst entscheiden, wann du rausrücken darfst. Suche dir eine Regel aus.
- Kreuze an.
- a) Du darfst bei 1 oder 6 rausrücken.
- b) Du darfst bei 3,4 oder 5 rausrücken.
- c) Du darfst bei 2 rausrücken.
- Begründe deine Entscheidung.

# Würfeln mit platonischen Körpern

- 1. Stunde: Wir lernen die platonischen Körper kennen
- 2. Stunde: Zufall oder kein Zufall?
- 3. Stunde: Hat der Tetraeder die größte Gewinnchance?
- 4. Stunde: Warum hat der Tetraeder die größte Gewinnchance?
- 5. Stunde: Die Begriffe „sicher“, „sehr wahrscheinlich“, „wahrscheinlich“, „unwahrscheinlich“ und „unmöglich“
- 6. Stunde: Glückszahlen – Werden alle Zahlen gleich oft gewürfelt
- 7. Stunde: Würfelt man mit zwei Tetraedern auch alle Zahlen gleich oft?
- 8. Stunde: Welche Raketenzahl muss ich wählen, wenn ich die Zahlen zweier Tetraeder malnehme?

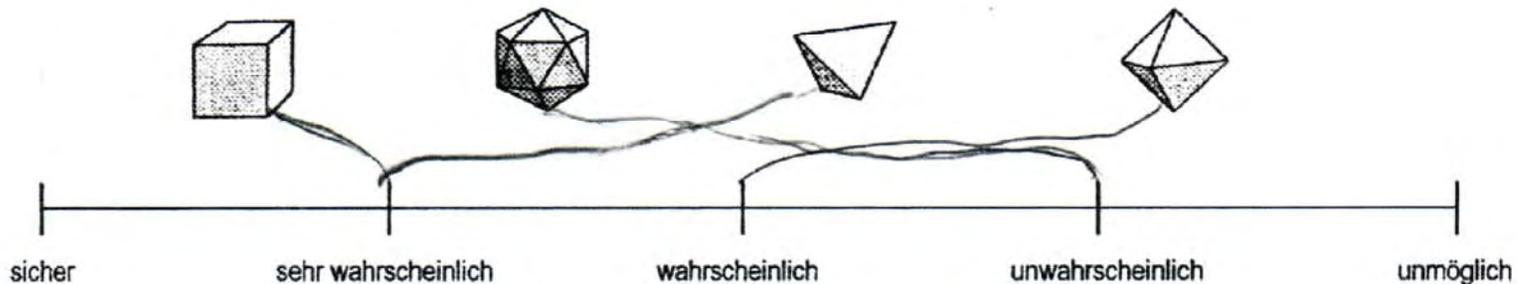
# Würfeln mit platonischen Körpern

**sicher, sehr wahrscheinlich, wahrscheinlich, unwahrscheinlich, unmöglich**

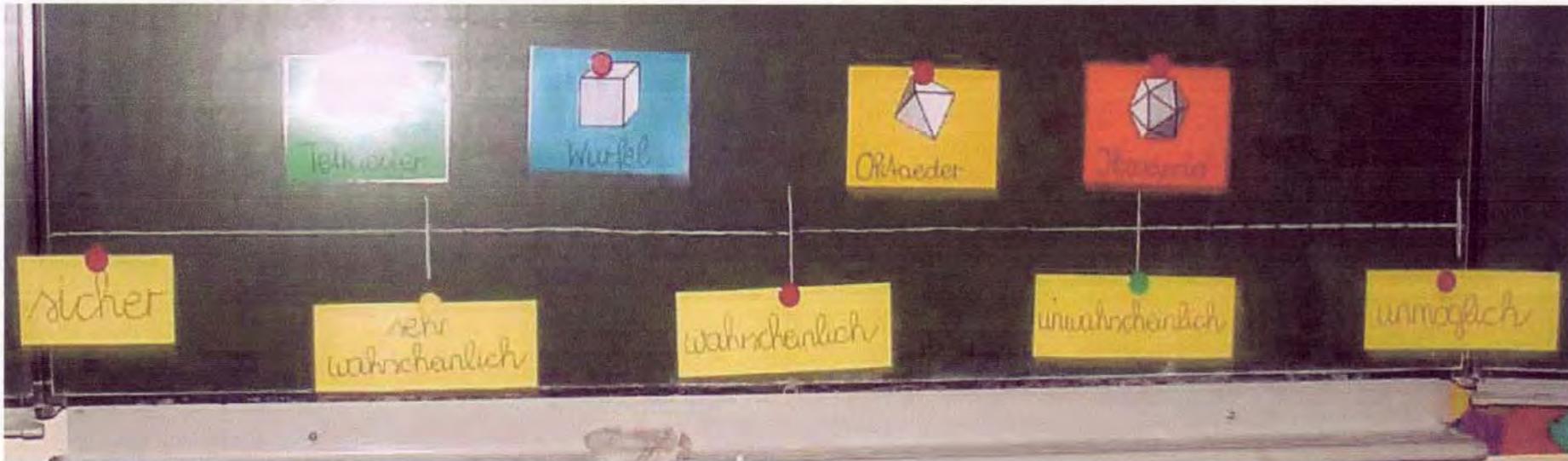
Wie wahrscheinlich ist es, beim Raketenspiel mit den Körpern zu gewinnen ?

Ordne die Körper den passenden Stellen auf der Linie zu !

Tipp: Du kannst die Körper auch zwischen den Wörtern einordnen.



# Würfeln mit platonischen Körpern



Wahrscheinlichkeitsskala

Name:

Aufgabe 1

Wenn du eine Gewinnzahl würfelst, gewinnst du.

Schau dir die 12er Würfel an.

Bei welchem 12er Würfel ist deine Gewinnchance größer?

Kreuze an!



2, 7



1, 3, 6, 8, 11

Begründe deine Entscheidung!

Name:

Aufgabe 2

Wenn du die „6“ würfelst, gewinnst du.

Schau dir den 6er Würfel und den 12er Würfel an.

Bei welchem Würfel ist deine Gewinnchance größer?

Kreuze an!



6



6

Begründe deine Entscheidung!

Name:

Aufgabe 3

Wenn du eine Gewinnzahl würfelst, gewinnst du.

Schau dir den 6er Würfel und den 12er Würfel an.

Kreuze den passenden Satz an!

- Mit dem 6er Würfel ist meine Gewinnchance größer.
- Bei beiden Würfeln ist meine Gewinnchance gleich.
- Mit dem 12er Würfel ist meine Gewinnchance größer.



1, 3, 5



1, 3, 4, 8, 9, 12

Begründe deine Entscheidung!

Name: \_\_\_\_\_

Aufgabe 4

Schau dir den 6er Würfel und die Gewinnregeln an.

- a) Wähle die Gewinnregel aus, mit der du die größte Gewinnchance hast. Kreuze sie blau an!
- b) Wähle die Gewinnregel aus, mit der du die kleinste Gewinnchance hast. Kreuze sie grün an!



1	2	3	4	5
Du gewinnst bei 1, 2 oder 3.	Du gewinnst bei 1, 3 oder 5.	Du gewinnst bei 1.	Du gewinnst bei Zahlen, die kleiner als 6 sind.	Du gewinnst bei 5 oder 6.
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Begründe deine Entscheidung!

Name:

Aufgabe 5

Wenn du eine Gewinnzahl würfelst, gewinnst du.

Schau dir den 12er Würfel an.

Wie ist deine Gewinnchance?

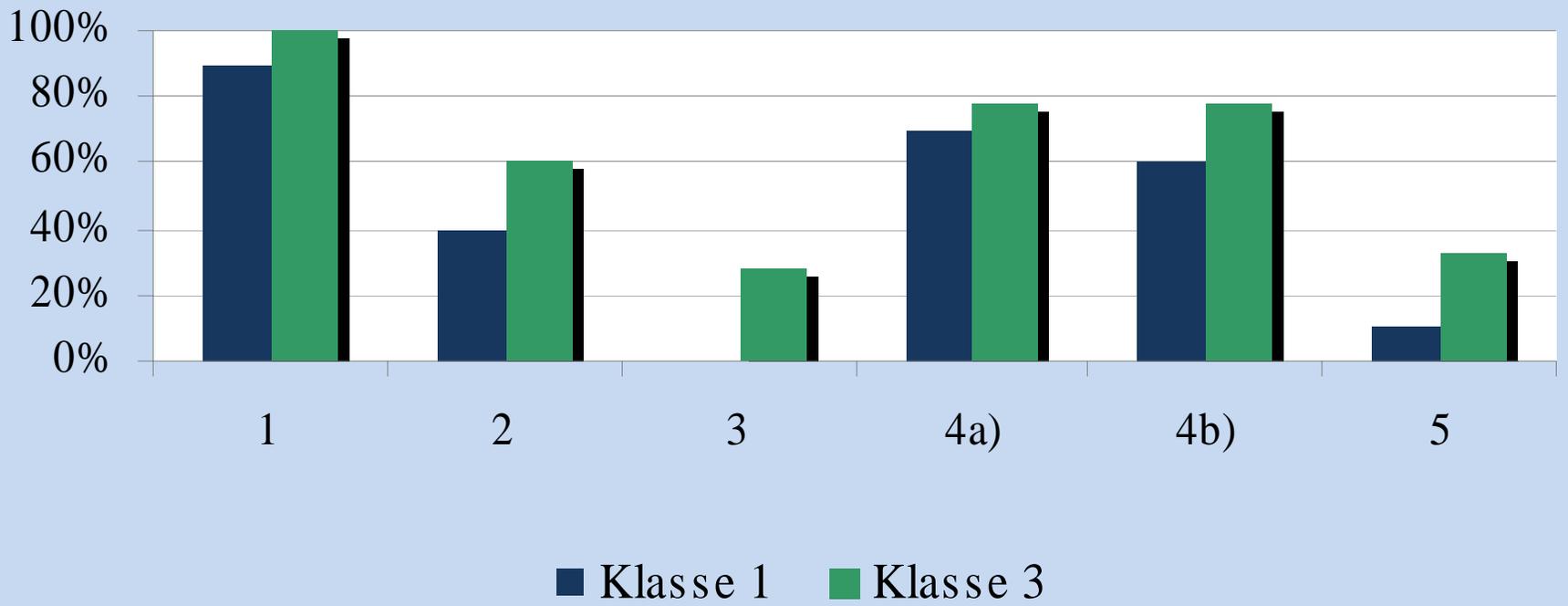
Kreuze den passenden Satz an!

- Es ist sicher, dass ich gewinne.
- Es ist wahrscheinlich, dass ich gewinne.
- Es ist unwahrscheinlich, dass ich gewinne.
- Es ist unmöglich, dass ich gewinne.



1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11

Begründe deine Entscheidung!



# Zufallsexperimente mit zwei (und mehr) Würfeln

- Wahrscheinlichkeit der Ereignisse beim Würfeln mit zwei Würfeln und der entsprechenden Summenbildung ist unterschiedlich.
- Diese Erkenntnis sollen die Kinder wiederum auf empirisch-statistischem Wege erfahren, bevor durch kombinatorische Überlegungen eine theoretische Begründung erfolgt.

Spiel  
das Spiel  
3x!

# Das Wurmspiel



## Regeln:

- Es wird mit 2 Würfeln gewürfelt, und die Augenzahlen der beiden Würfel werden addiert.
- Spieler 1 darf seine Spielfigur immer dann ein Feld vorrücken, wenn die Summe der beiden Würfel 6 ist, Spieler 2 bei der Summe 9.



Quelle:

Neubert, Bernd: Grundschüler beurteilen ein Würfelspiel – Ein Erfahrungsbericht. – In: Stochastik in der Schule 22(2002)1, S. 25 - 29

# Fragen zum „Wurmspiel“

- Für das Spiel gibt es noch drei andere Spielregeln:
- Spieler 1 darf seine Spielfigur immer dann ein Feld vorrücken, wenn die Summe der beiden Würfel 7 ist, Spieler 2 bei der Summe 3.
- Spieler 1 darf seine Spielfigur immer dann ein Feld vorrücken, wenn die Summe der beiden Würfel 12 ist, Spieler 2 bei der Summe 8.
- Spieler 1 darf seine Spielfigur immer dann ein Feld vorrücken, wenn die Summe der beiden Würfel 4 ist, Spieler 2 bei der Summe 10.
- *Bewertet die drei Spielregeln hinsichtlich der Gewinnchancen der beiden Spieler. Welche Spielregel ist für Spieler 1 die günstigste, welche für Spieler 2?*
- *Begründet Eure Antwort!*
- *Formuliert eine Spielregel, bei der Ihr die größten Gewinnchancen habt!*
- *Formuliert eine Spielregel, bei der beide Spieler gleich große Gewinnchancen haben und es ein faires Spiel ist!*
- *Gibt es verschiedene Möglichkeiten?*

## Würfeln mit zwei Würfeln (Summe)

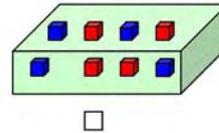
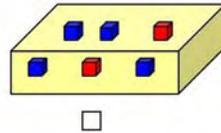
Würfelsumme	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Möglichkeiten	1+1	1+2 2+1	1+3 3+1 2+2	1+4 4+1 2+3 3+2	1+5 5+1 2+4 4+2 3+3	1+6 6+1 2+5 5+2 3+4 4+3	2+6 6+2 3+5 5+3 4+4	3+6 6+3 4+5 5+4	4+6 6+4 5+5	5+6 6+5	6+6
Anzahl	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

# Urne

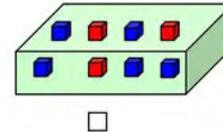
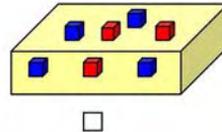
- Zufallsgenerator ist bekannt: Jahrmarkt, bei Mannschaftsbildungen, Lotterie
- Vorteil gegenüber dem Würfel: Durch unterschiedliche Anzahlen von Kugeln kann die Ergebnismenge nahezu beliebig variiert werden.
- Welches Begriffswort in der Grundschule?
- Inhalt von Aufgaben zum Urnenmodell: Einschätzung der besseren Gewinnchancen zwischen zwei Urnen beim einmaligen Ziehen.
- Es wird durch ein Gefäß repräsentiert, in welchem sich Gegenstände gleicher Form befinden. Diese Gegenstände werden zufällig gezogen.
- Unterschiedliche Schwierigkeiten der Aufgaben erhält man durch unterschiedliche Mischungsverhältnisse der Kugeln in den Urnen.

# Aufgaben zum Urnenmodell

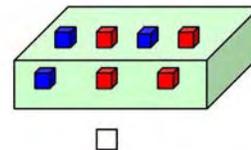
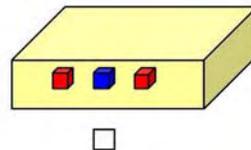
Aufgabe 1:



Aufgabe 2:



Aufgabe 3:



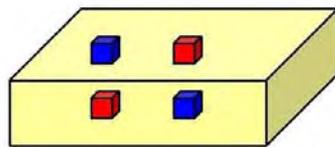
Wenn du rot ziehst, gewinnst du! Aus welcher Schachtel würdest du ziehen?  
Begründe deine Überlegungen!

# Aufgaben zum Urnenmodell

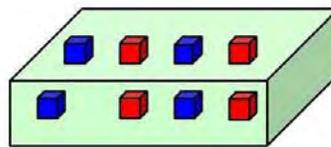
## Aufgabe 4:

Betrachte die beiden Schachteln und kreuze den passenden Satz an!  
Begründe deine Entscheidung!

- Mit Schachtel 1 ist meine Chance zu gewinnen größer.
- Bei beiden Schachteln ist meine Chance zu gewinnen gleich.
- Mit Schachtel 2 ist meine Chance zu gewinnen größer.



Schachtel 1



Schachtel 2

# Glücksrad und Glückskreisel

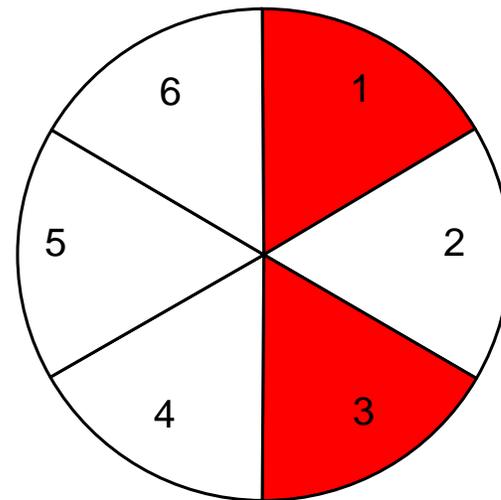
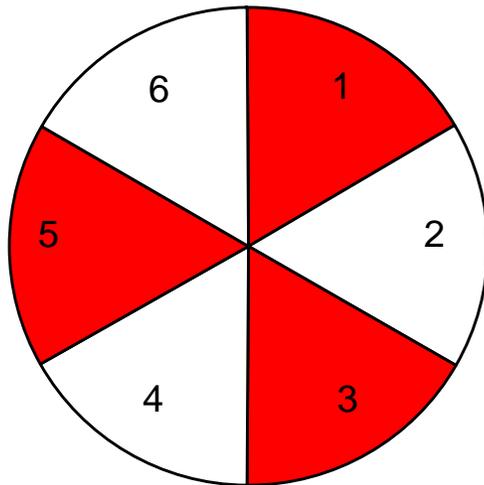
Größe der Kreissektoren kann unterschiedlich gewählt werden

- Wahrscheinlichkeiten lassen sich sehr anschaulich zeigen
- Einteilungen in gleich große Sektoren sowie in verschiedenen große Felder möglich
- Man kann die Felder färben und/oder beschriften oder nummerieren
- Aufgrund der vielen verschiedenen Möglichkeiten der Gestaltung, lassen sich Glücksräder gut in allen Altersstufen einsetzen.

zwei Aufgabengruppen:

- *Vergleich zweier Glücksräder hinsichtlich der Gewinnchancen*
- *Vergleich der Gewinnwahrscheinlichkeit innerhalb eines Glücksrads*

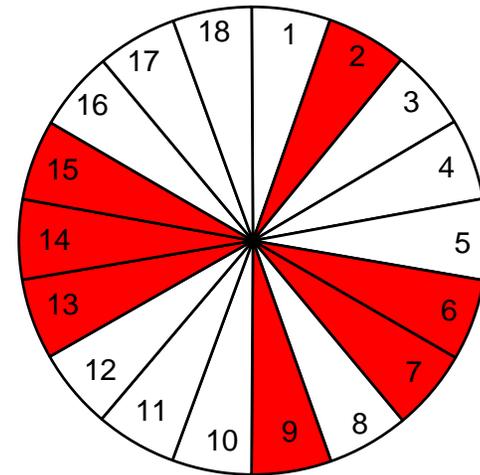
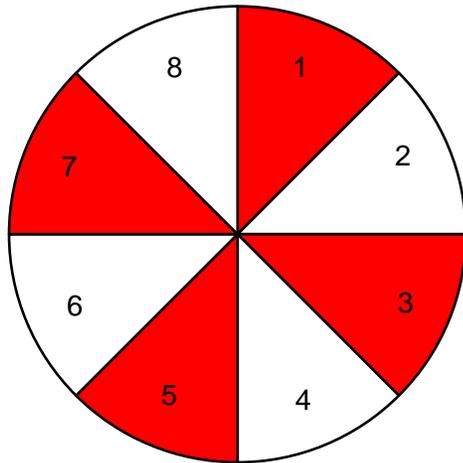
# Aufgaben zum Glücksrad



Du siehst hier zwei Glücksräder mit roten Gewinnfeldern. Bei welchem Rad sind die Gewinnchancen größer? Warum?

Richtige Antworten: Klasse 1 und 3: 100%

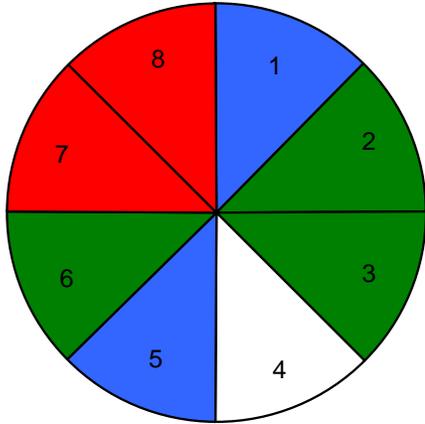
# Aufgaben zum Glücksrad



Du siehst hier zwei Glücksräder mit roten Gewinnfeldern. Bei welchem Rad sind die Gewinnchancen größer? Warum?

Richtige Antworten: Klasse 1: 10% und 3: 30%

# Aufgaben zum Glücksrad



Lies dir die Gewinnregeln für das Glücksrad auf den Karten durch. Welche Regel würdest du wählen, um die größten Gewinnchancen zu haben?

Begründe deine Entscheidung!

**Regel 1:**  
Du  
gewinnst  
bei 1, 2  
oder 3

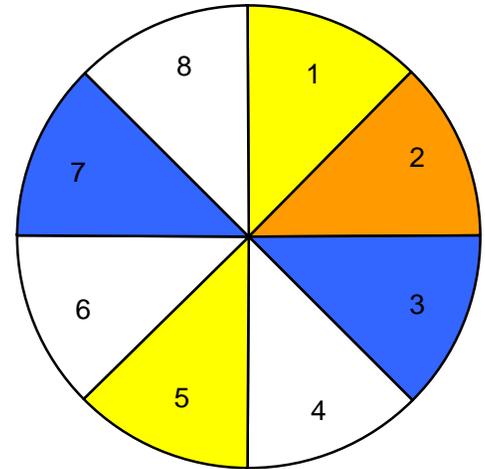
**Regel 2:**  
Du  
gewinnst  
bei rot

**Regel 3:**  
Du  
gewinnst  
bei weiß  
oder blau

**Regel 4:**  
Du  
gewinnst  
bei 2, 4, 6  
oder 8

- Lies dir die Gewinnregeln für das Glücksrad durch:

- **A Du gewinnst bei gelb**
- **B Du gewinnst bei weiß**
- **C Du gewinnst bei weiß, gelb oder blau**
- **D Du gewinnst bei weiß, gelb, blau oder orange**
- **E Du gewinnst bei 10 oder orange**

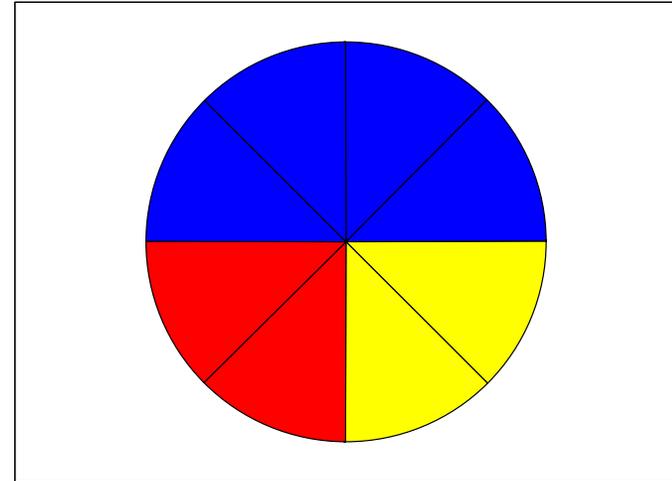
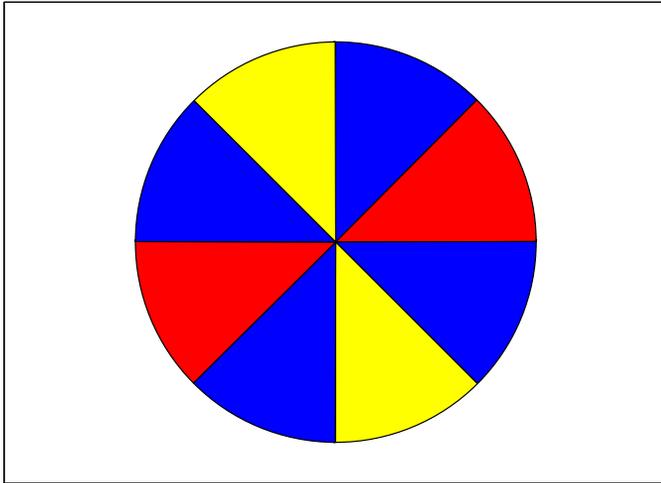


a) Gibt es eine Gewinnregel, bei der du auf jeden Fall gewinnst? Erkläre deine Antwort!

b) Gibt es eine Gewinnregel, bei der du auf keinen Fall gewinnst? Erkläre deine Antwort!

c) Bei welcher Regel sind die Gewinnchancen am größten, bei welcher Regel sind sie am niedrigsten? Ordne die Regeln nach Gewinnchancen! Beginne mit der Regel mit der größten Gewinnchance!

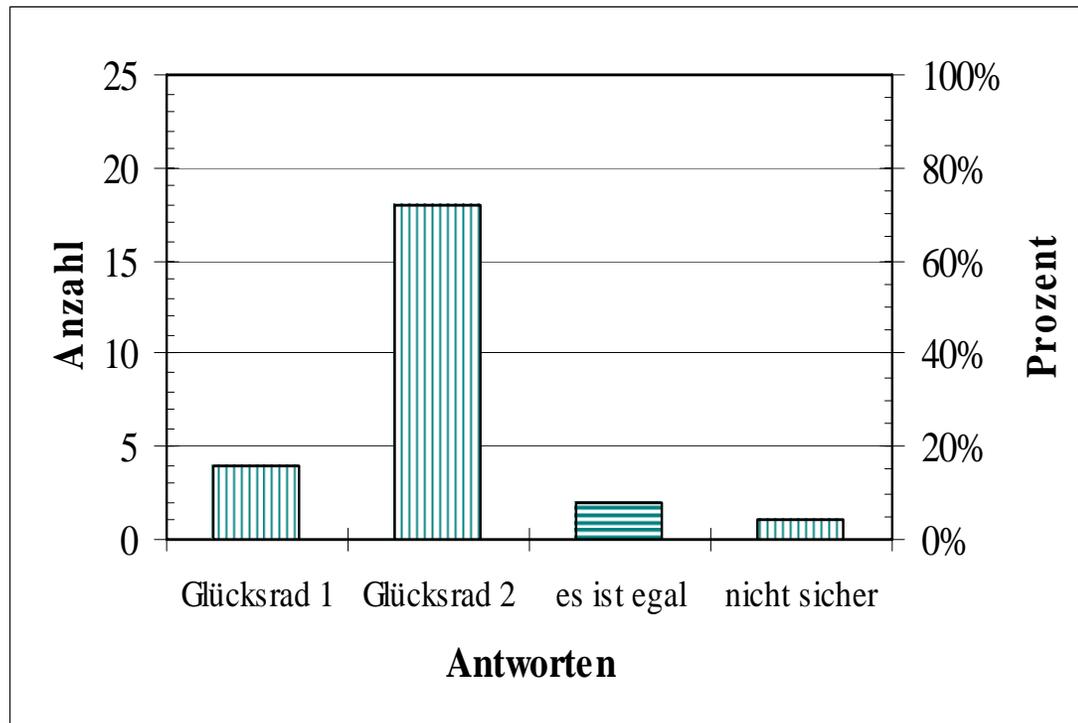
# Vergleich von zwei Glücksrädern



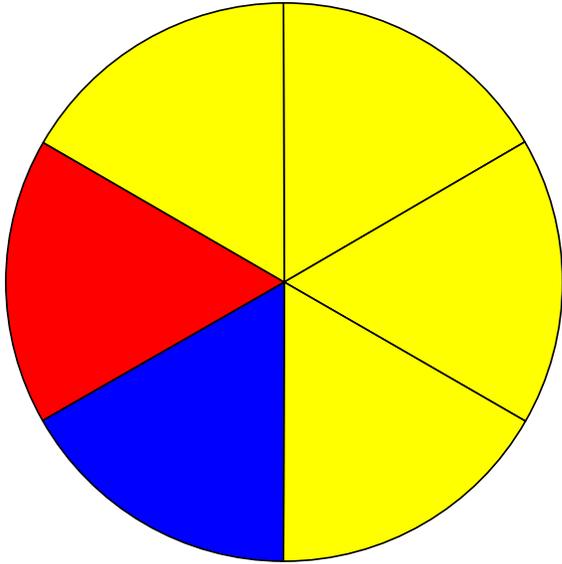
- Ich wähle Glücksrad 1, weil
- Ich wähle Glücksrad 2, weil
- Es ist egal, welches Glücksrad man wählt, weil
- Ich bin mir nicht sicher, weil

# Auswertung Aufgabe

## Vergleich von zwei Glücksrädern

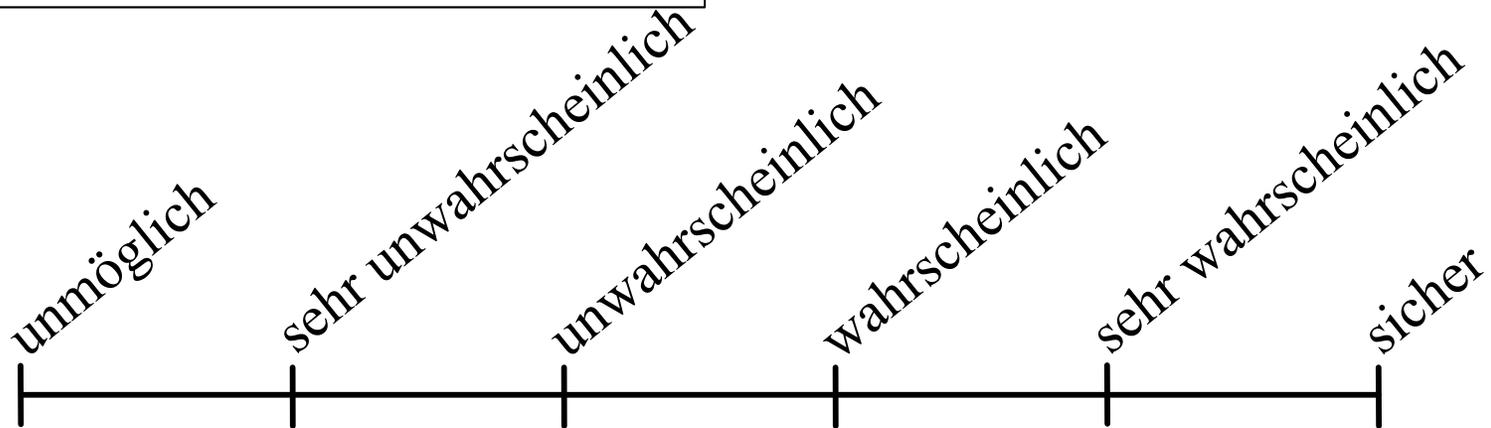


## 7. Du gewinnst bei gelb.



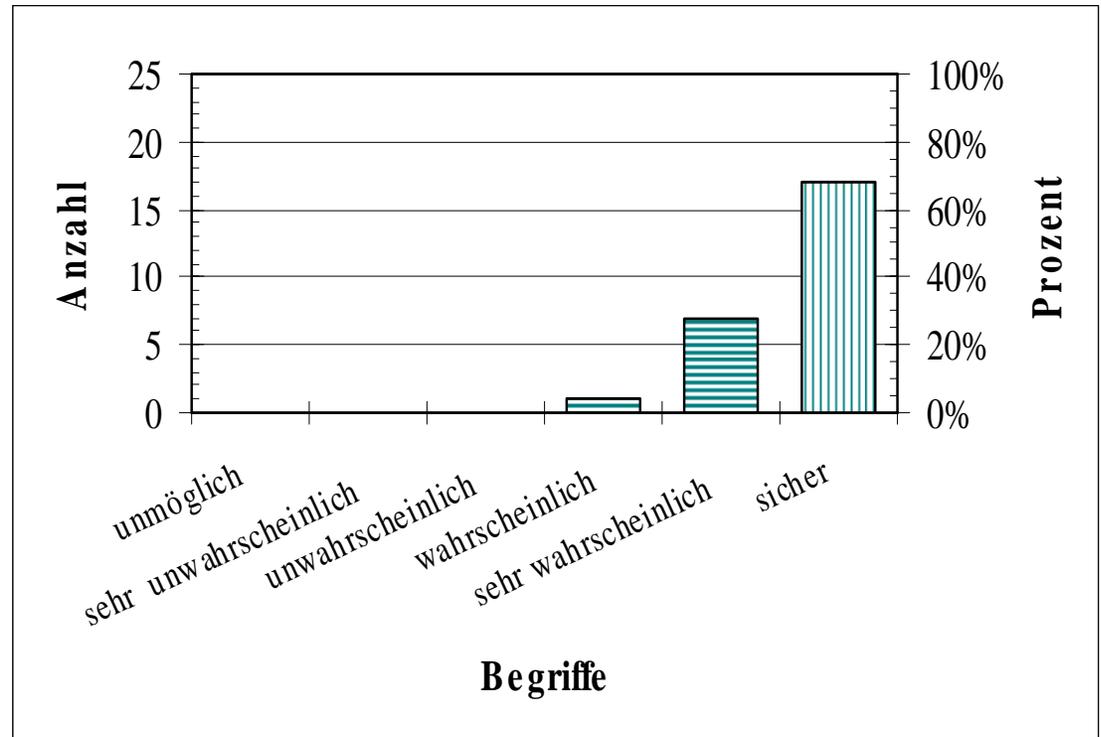
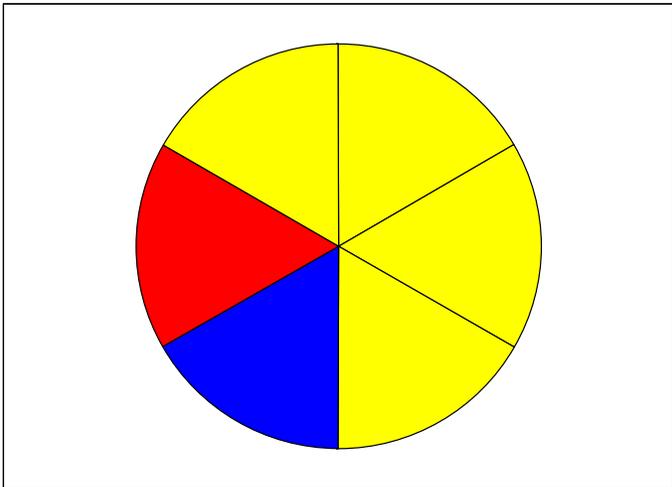
Wie sind deine Chancen zu gewinnen?

Kreuze auf der Linie die entsprechende Stelle an.



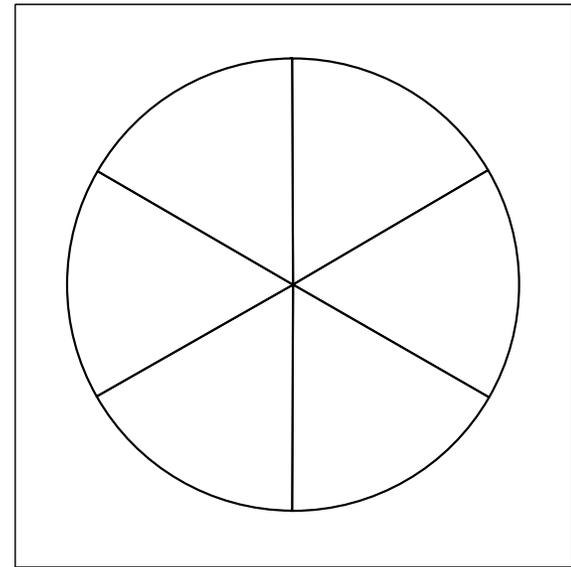
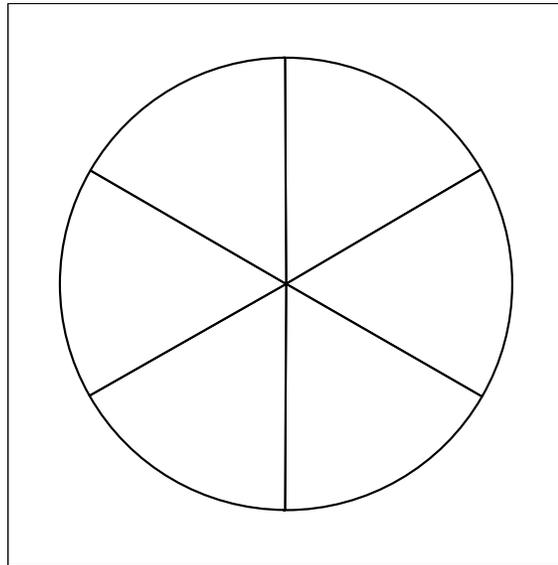
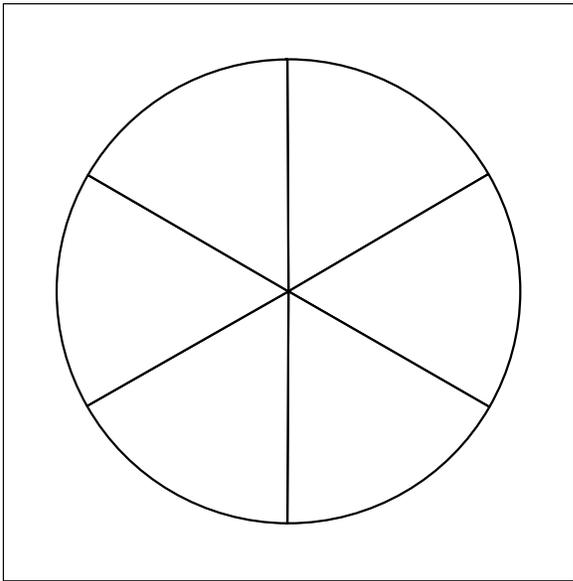
# Auswertung Aufgabe 7

## Einschätzen von Gewinnchancen



8. Du gewinnst bei rot.

Male die Glücksräder so aus, dass deine Gewinnchancen möglichst groß sind.



# Aufgaben zum Vergleich zweier verschiedenartiger Zufallsgeneratoren

- In den folgenden Beispielen werden Zufallsgeneratoren miteinander verglichen, die vom äußeren Erscheinungsbild nichts miteinander zu tun haben.
- Es geht darum, dass die Kinder eine Transferleistung zwischen den Zufallsgeneratoren erbringen müssen.

Aufgabe 4:

Du drehst mit deinen Freunden am Glücksrad.

Schaue dir das Glücksrad an!

Jeder von euch kann sich eine der Karten aussuchen.

Du  
gewinnst  
bei gelb!

1

Du  
gewinnst  
bei blau  
oder gelb!

2

Du  
gewinnst  
bei orange!

3

Du  
gewinnst  
bei blau!

4

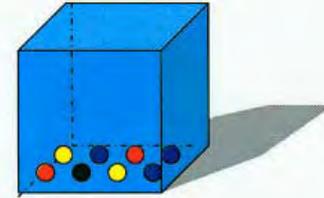
Du  
gewinnst  
bei blau,  
rot, gelb  
oder  
schwarz!

5

Suche dir eine Karte aus mit der

- a) es möglich ist, dass du gewinnst.
- b) es sicher ist, dass du gewinnst.
- c) es unmöglich ist, dass du gewinnst.

Begründe deine Antworten!

Aufgabe 4:

Du ziehst mit deinen Freunden Kugeln aus der Kiste.

Schaue dir die Kiste an!

Jeder von euch kann sich eine der Karten aussuchen.

Du  
gewinnst  
bei gelb!

1

Du  
gewinnst  
bei blau  
oder gelb!

2

Du  
gewinnst  
bei orange!

3

Du  
gewinnst  
bei blau!

4

Du  
gewinnst  
bei blau,  
rot, gelb  
oder  
schwarz!

5

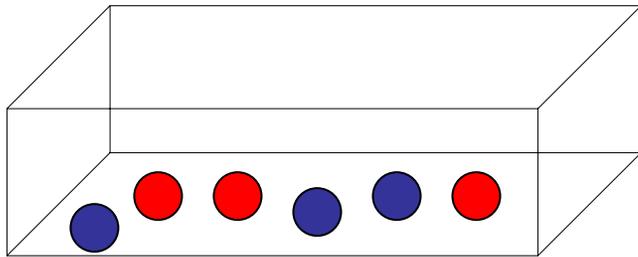
Suche dir eine Karte aus mit der

- a) es möglich ist, dass du gewinnst.
- b) es sicher ist, dass du gewinnst.
- c) es unmöglich ist, dass du gewinnst.

Begründe deine Antworten!

# Vergleich Würfel - Urne

- Aufgabe 3
- In der Schachtel sind **6** Kugeln, **3** rote und **3** blaue. Du gewinnst, wenn du **rot** ziehst. Bei dem Würfel gewinnst du, wenn du die Zahl **1**, **5** oder **6** würfelst. Wählst du Schachtel oder Würfel, um zu gewinnen?
- Begründe deine Entscheidung!

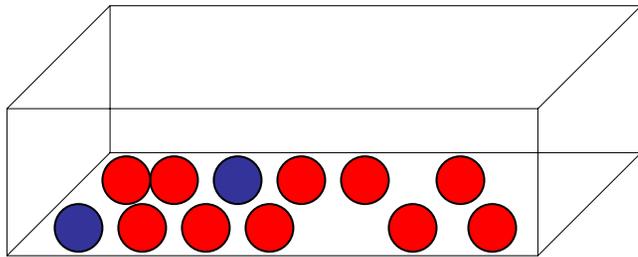


**1, 5, 6**

14 von 17 Kindern mit richtiger Lösung

# Vergleich Würfel - Urne

- Aufgabe 4
- In der Schachtel sind **12** Kugeln, **10** rote und **2** blaue. Du gewinnst, wenn du **rot** ziehst. Bei dem Würfel gewinnst du, wenn du die Zahl **1, 2, 3, 4** oder **5** würfelst. Wählst du Schachtel oder Würfel, um zu gewinnen?
- Begründe deine Entscheidung!



**1, 2, 3, 4, 5**

6 von 17 Kindern mit richtiger Lösung

# Erkenntnisse aus Untersuchungen zu Vorkenntnissen

- Kinder erfassen von Beginn der Schulzeit an Aufgaben zum Einschätzen von Gewinnchancen.
- Dabei sind Aufgaben zu unterschiedlichen Zufallsgeneratoren möglich.
- Mit zunehmendem Alter sind auch komplexere Aufgaben möglich.

# Erkenntnisse aus Untersuchungen zu Vorkenntnissen

- Zu den Strategien:
- Beim Vergleich der Gewinnchancen orientieren sich vor allem jüngere Schulkinder (Klasse 1) sehr stark an den günstigen Möglichkeiten (ungünstige werden vernachlässigt).
- Verständnis für Relationen ist bei den meisten Kindern nur in Ansätzen vorhanden.
- Dies ändert sich mit zunehmendem Alter (noch in der Grundschulzeit).

# Fazit aus den Untersuchungen

- Grundschüler erfassen Aufgaben zum Einschätzen von Gewinnchancen (mit unterschiedlichen Zufallsgeneratoren).
- Hinsichtlich der Auswahl von Vergleichskriterien treten neben erfolgreichen Strategien auch Fehlvorstellungen auf.
- Vergleiche mit Hilfe des Verhältnisbegriffs fallen schwer.
- Begriffe werden nicht (nur) im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung verwendet, sondern auch im Sinne der Umgangssprache.
- **Frage: Wie kann ein entsprechender Unterricht aussehen, der an diesen Problemen arbeitet?**

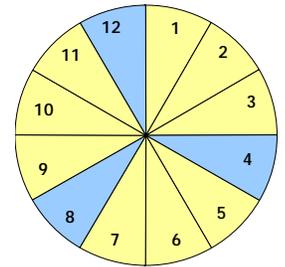
# Unterrichtsbeispiele

- **Wahrscheinlichkeitsrechnung (Klasse 3)**
- **1. Sequenz: Zufallsexperimente mit dem Würfel**
- Die Schüler untersuchen die Wahrscheinlichkeiten der Augenzahlen beim einmaligen Würfelwurf. Sie untersuchen verschiedene Gewinnregeln.
- **2. Sequenz: Zufallsexperimente mit zwei Würfeln**
- Die Schüler untersuchen die Wahrscheinlichkeiten der Augensummen beim zweifachen Würfelwurf. Sie lernen spielerisch verschiedene Gewinnregeln kennen und untersuchen diese.
- **3. Sequenz: Zufallsexperimente mit dem Glücksrad**
- Im handelnden Umgang mit dem Glücksrad erweitern die Schüler ihre Kenntnisse zum Einschätzen und zum Vergleichen von Wahrscheinlichkeiten.
- **4. Sequenz: Vergleich von Wahrscheinlichkeiten von Würfel und Glücksrad**
- Die Schüler erweitern ihre Fähigkeiten im Einschätzen von Wahrscheinlichkeiten durch den direkten Vergleich einfacher Wahrscheinlichkeiten bei Würfel und Glücksrad.
- *Stefanie Mayer: Wahrscheinlichkeitsrechnung. Ein motivierendes Thema für die Grundschule. Erscheint in: Grundschulunterricht Mathematik H. 2/2008, S. 24 - 28*

## Ihr gewinnt, wenn eure Zahl durch 4 teilbar ist.

Welche Zahlen sind das? \_\_\_\_\_

- ① Dreht euer Glücksrad 50-mal. Notiert das Ergebnis in der Tabelle.



	Die Zahl ist durch 4 teilbar.	Die Zahl ist <b>nicht</b> durch 4 teilbar.
Anzahl in Strichen		
gesamt		
Anzahl mit Gruppe __		

- ② Ihr gewinnt bei einer geraden Zahl.  
Welche Zahlen sind das? \_\_\_\_\_

Sind eure Chancen zu gewinnen jetzt besser oder schlechter?

---



---

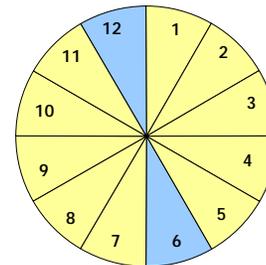


---

Ihr gewinnt, wenn eure Zahl durch 6 teilbar ist.

Welche Zahlen sind das? \_\_\_\_\_

① Dreht euer Glücksrad 50-mal. Notiert das Ergebnis in der Tabelle.



	Die Zahl ist durch 6 teilbar.	Die Zahl ist <b>nicht</b> durch 6 teilbar.
Anzahl in Strichen		
gesamt		
Anzahl mit Gruppe __		

Würdet ihr das Angebot annehmen? Begründet eure Antwort.

\_\_\_\_\_

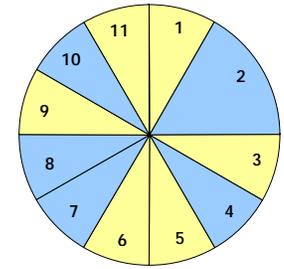
\_\_\_\_\_

② Malt das leere Glücksrad mit gelb und blau so an, dass die Gewinnchance höher ist als vorher.

## Ihr gewinnt bei blau.

①

Dreht euer Glücksrad 50-mal. Notiert das Ergebnis in der Tabelle.



	Das Feld ist blau.	Das Feld ist <b>nicht</b> blau.
Anzahl in Strichen		
gesamt		
Anzahl mit Gruppe __		

② Was fällt euch an dem Ergebnis auf?

③ Was fällt euch an diesem Glücksrad auf? Hat jede Zahl die gleiche Gewinnchance? Begründet eure Antwort.

### Zusatz:

Malt das leere Glücksrad mit den Farben rot, gelb, blau und grün so an, dass alle Farben die gleiche Gewinnchance haben.

## Unterrichtseinheit Klasse 3

- 1. Stunde: Erste Erfahrungen und Begriffe
- 2. Stunde: Würfeln mit einem Würfel
- 3. Stunde: Würfelspiele mit einem Würfel
- 4. Stunde: Würfeln mit zwei Würfeln
- 5. Stunde: Würfelspiele mit zwei Würfeln
- 6. Stunde: Glücksräder
- 7. Stunde: Spiel zum Glücksrad

# Unterrichtsbeispiele

- **Petra Burggraf:**
- **Pausenunfälle auf unserem Schulhof, Risiken schätzen und berechnen**
- Reizwortgeschichten
- Versprachlichung von Wahrscheinlichkeit
- Datenerfassung auf dem Schulhof
- Statistische Auswertung der Schulhofdaten
- Stochastische Auswertung der Schulhofdaten
- Rechengeschichten zu Risiken schreiben
  
- In: Sache – Wort – Zahl H.16/1998, S. 17 - 24

# Brückengeschichte



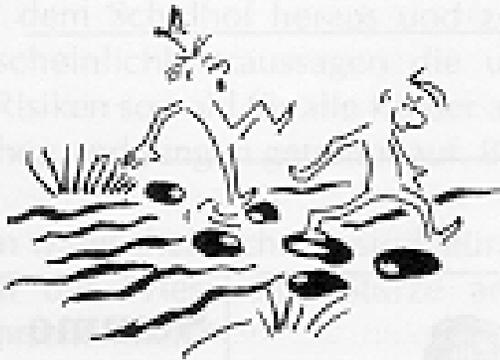
1.

Burggraf, Petra

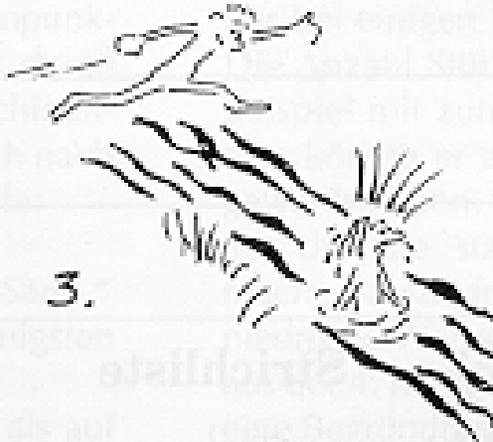
Eine Gruppe von 40 Schulkindern muss bei einem Ausflug einen Bach überqueren. Bei der ersten Überquerung legen sie ein Brett über den Bach und laufen darüber, dabei treten 9 Kinder daneben und fallen ins Wasser.

Bei der zweiten Überquerung steigen die 40 Kinder über große Steine, die im Bach liegen. Hierbei rutschen 11 Kinder ab und fallen ins Wasser.

Bei der dritten Überquerung haben die Kinder nichts gefunden, was ihnen als Brücke dienen könnte, deshalb nehmen sie Anlauf und springen über den Bach. 14 Kinder schaffen es nicht und landen im Wasser.



2.



3.

Quelle:  
Burggraf, Petra: Pausenunfälle auf unserem Schulhof: Risiken schätzen und berechnen. In: Sache-Wort-Zahl 26(1998)16, S. 17 - 24



## Eine Rechengeschichte von Sascha

*Auf dem Schulhof*

*In jeder Klasse sind 24 Kinder. In der großen Pause fallen 10 Kinder aus der 1. Klasse hin.*

*Aus der 2. Klasse 8 Kinder, aus der 3. Klasse 5 Kinder und aus der 4. Klasse 1 Kind.*

*Frage: Wie wahrscheinlich ist es, dass ein Kind aus der 4. Klasse fällt?*

*Strichliste:*

1. Klasse		3. Klasse	
2. Klasse		4. Klasse	

*Antwort: Es ist am wenigsten wahrscheinlich, dass ein Kind aus der 4. Klasse fällt.*

*Begründung: Die Kinder der Klasse 1 bis 3 fallen häufiger hin, die Kinder der Klasse 4 kennen schon besser alle Gefahren.*

*Sascha, Klasse 4*