Regina Bruder

Modul1:
Weiterentwicklung der Aufgabenkultur im Mathematikunterricht

Das wichtigste „Werkzeug“, das den Mathematiklehrkräften für ihre Unterrichtsplanung zur Verfügung steht, sind Aufgaben. Mit dieser Einsicht[1] lag es nahe, im Programm zur "Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts" dem ***Arbeiten mit Aufgaben*** im Mathematikunterricht einen Modulplatz an vorderster Stelle einzuräumen.

Das Ziel der Weiterentwicklung einer Aufgabenkultur unterstellt, dass es eine gewisse etablierte Aufgabenkultur gibt, deren kritische Aspekte im 1.Kapitel zusammengefasst und bzgl. möglicher Ursachen analysiert werden. Im 2. Kapitel geht es dann um Lösungsangebote in Form von praktisch erprobten Vorschlägen für das ***Arbeiten mit Aufgaben*** im Mathematikunterricht.

Zunächst eine kurze begriffliche Verständigung:

Den folgenden Ausführungen wird ein weiter Aufgabenbegriff zugrunde gelegt, der sich inzwischen in der Unterrichtspraxis und in der Lehreraus- und -fortbildung als tragfähig und fruchtbar erwiesen hat:

- Eine Aufforderung zum Lern-Handeln im Mathematikunterricht wird als **Aufgabe** bezeichnet.

  Dazu gehören Aufforderungen zum (elementaren) Identifizieren und Realisieren von mathematischen Begriffen, Zusammenhängen und Verfahren sowie von Anwendungen und Problemlösestrategien ebenso wie Aufforderungen zum Erkennen von Zusammenhängen, Beschreiben, Verknüpfen, Ausführen, Begründen und Interpretieren bis hin zu solch komplexen Handlungen wie Planen einer mathematischen Projektbearbeitung, Suchen nach geeigneten mathematischen Werkzeugen einschließlich Softwaretools für ein Problem, Systematisieren möglicher mathematischer Zugänge zu einem Problemfeld, Kommunizieren und Beurteilen verschiedener Lösungsansätze bis hin zu den Wirkungen von Mathematik in der Gesellschaft.

- Eine individuell schwierige bzw. ungewohnte Aufgabe wird als Problemaufgabe oder kurz als **Problem** bezeichnet.

  Es kann erst dann von einem Problem und demzufolge auch von Problemlösen gesprochen werden, wenn eine Aufgabe einen Adressaten mit entsprechender Wahrnehmung hat, wenn die Aufgabe also in eine konkrete, individuell als schwierig empfundene oder zumindest aus Sicht der mathematischen Vorerfahrungen ungewohnte Lernsituation gebracht wird.

  Problemlösenlernen lässt sich beschreiben als das Kennen- und Anwendenlernen von Methoden zum Lösen individuell schwieriger Aufgaben.

- ***Arbeiten mit Aufgaben*** beschreibt die zentralen Aktivitäten der Lehrkraft zur Planung und Moderation einer (aufgabenbasierten) Lernumgebung.

---
[1] In der Fachdidaktik der Mathematik war die Rolle der Aufgaben im MU lange sehr umstritten, vgl. auch: Lenné (1969).

Arbeiten mit Aufgaben umfasst damit das Auswählen, Entwickeln, Variieren von Aufgaben, die Art des Stellens von Aufgaben an die Lernenden und das Beurteilen des Lernpotenzials von Aufgaben durch die Lehrkraft genauso wie ein Arrangieren von Aufgaben innerhalb einer Unterrichtsstunde, Bereitstellen von Musterlösungen, Entwickeln von Bewertungsmaßstäben für Aufgabenlösungen, die Art der Begleitung des Aufgabenbearbeitungsprozesses der Lernenden und das Herausarbeiten des fachlichen und lernmethodischen Erkenntniszuwachses bis hin zur Wahl der Organisationsform für das Auswerten und Vergleichen von Schülerlösungen als Teil des Managements im Klassenraum.

Es geht beim ***Arbeiten mit Aufgaben*** darum, wie ein Lernpotenzial in einer Aufgabe oder in einem speziellen Aufgabenarrangement angelegt wird und wie dieses Potenzial dann auch tatsächlich genutzt und fruchtbar gemacht wird.

Mit dieser Begriffsbestimmung geraten verstärkt Schülertätigkeiten bzw. Lernhandlungen auf verschiedenen Erkenntnisebenen (geistige, sprachliche, materielle Ebene) ins Blickfeld und stützen so den aktuellen Kompetenzgedanken in den Bildungsstandards der KMK[2].

Eine **„Aufgabenkultur“** wird im Folgenden also mit der Art und Weise beschrieben, wie **mit Aufgaben gearbeitet** wird – von der Bereitstellung eines hohen Lernpotenzials für alle Schülerinnen und Schüler bis zu deren Nutzung und Umsetzung im Unterricht.

1. Worin besteht der Bedarf nach Weiterentwicklung der bisherigen Aufgabenkultur ?

Im Folgenden werden exemplarisch Phänomene aus empirischen Untersuchungen vorgestellt, für die sich gemeinsame Ursachen u. a. auch in der bisherigen Aufgabenkultur finden lassen.

- Die Ergebnisse eines allgemeinen Problemlösetests in der PISA-Studie 2003[3] zeigten, dass die Jugendlichen aus Deutschland im Bereich Mathematik (Gesamtmittelwert von 503 Punkten) ein im internationalen Vergleich deutlich niedrigeres Durchschnittsniveau als im Bereich Problemlösen (513 Punkte) erzielen. Es gibt nur wenige Staaten, die diesen Befund aufweisen. Demnach wird das kognitive Potential der Jugendlichen bei uns wohl weniger erfolgreich in mathematische (und auch naturwissenschaftliche) Kompetenz umgesetzt.

- Die Auswertung der TIMMS-Videostudie zeigt u. a.: In Deutschland werden im Vergleich zu den USA und Japan am wenigsten komplexe Aufgaben im Mathematikunterricht gestellt. Das gilt für Geometrie und Algebra gleichermaßen, vgl. Neubrand, J. (2002).

- Ergebnisse des Projektes PALMA[4] weisen darauf hin, dass inhaltliches mathematisches Denken von Klassenstufe 5 auf 6 durch kalkülhafte Regelanwendung ersetzt wird. Auch bei den emotionalen und motivationalen Lernvoraussetzungen deutet sich in dieser Altersstufe eine insgesamt eher ungünstige Entwicklung an.

---

[2] Bildungsstandards für den mittleren Schulabschluss Mathematik unter: http://www.kmk.org/schul/Bildungsstandards/Mathematik_MSA_BS_04-12-2003.pdf

[3] PISA 2003, Ergebnisse des zweiten Internationalen Vergleichs, Zusammenfassung unter: http://pisa.ipn.uni-kiel.de/Ergebnisse_PISA_2003.pdf, S.15

[4] Pekrun/Götz/v.Hofe/Blum/Jullien/Zirngibl/Kleine/Wartha/Jordan: Emotionen und Leistung im Fach Mathematik: Ziele und erste Befunde aus dem „Projekt zur Analyse der Leistungsentwicklung in Mathematik“ (PALMA), Waxmann Münster 2004, S.359

Halten wir fest: Unsere Schülerinnen und Schüler sind keineswegs weniger leistungsfähig als die vergleichbare Altersgruppe im europäischen Umfeld. Nur kommt diese Leistungsfähigkeit im derzeitigen Mathematikunterricht leider noch zu wenig zum Tragen.

Woran liegt das?

Wir müssen uns nicht darüber wundern, wenn im internationalen Vergleich (PISA) die Lernergebnisse selbst bei leistungsstarken Schülerinnen und Schülern noch nicht befriedigen können, wenn in unserem Unterricht gar nicht genügend hohe Anforderungen gestellt bzw. entsprechende Lernangebote gemacht werden[5].

Aber das Problem ist sehr vielschichtig: Wenn die Lehrkräfte als „Einzelkämpfer" agieren, sich nicht in der Fachschaft inhaltlich über angemessene Lernanforderungen und geeignete Methoden verständigen und gegenseitig in der Durchsetzung unterstützen, kann das zu einem oft auch gut gemeinten individuellen Nachgeben im Anforderungslevel in einer Lerngruppe führen. Die Lernenden dort abholen, wo sie sind, ist ein heute erst recht unverzichtbarer didaktischer Grundsatz. Er impliziert jedoch nicht, dass man dort auch lange verweilen muss, wo abgeholt wurde.

Vielfach herrscht noch die Meinung, dass man erst so lange die Grundlagen üben muss, bis sie „sitzen" und dann erst könne man zu komplexeren Anforderungen übergehen. Doch dafür reicht oft die Zeit nicht mehr. Hier sind alltagstaugliche Aufgabenformate gefragt, die dem unterschiedlichen Festigungsbedarf und Ausgangsniveau der Lernenden besser als bisher Rechnung tragen, vgl. auch Modul 4: Sicherung von Basiswissen.

Oft beklagt wird mangelnde Anstrengungsbereitschaft vieler Lernender. Für viele Schülerinnen und Schüler erscheint jedoch die Einstiegshürde bei einer Problemaufgabe zu hoch, so dass sie entmutigt aufgeben oder verweigern. Lösungsansätze dazu vgl. in Kapitel 2.3.

Allerdings hat beides auch etwas mit dem Phänomen zu tun, dass unseren Schülerinnen und Schülern von Lehrerseite oft zu wenig zugetraut wird. Solche Beobachtungen machen z.B. Lehrkräfte aus benachbarten Ländern, wenn sie sich gemeinsam mit deutschen Lehrkräften Unterrichtsvideos ansehen. Dieses „zu wenig zutrauen" zeigt sich sehr subtil bereits in den Unterrichtsphasen, in denen neuer Stoff erarbeitet wird:

„*Die Engführung der Erarbeitung des neuen Stoffs im fragend-entwickelnden Unterrichtsgespräch auf eine einzige Lösung und Routine hin ist für den Mathematikunterricht und aller Wahrscheinlichkeit nach auch für den Unterricht in den naturwissenschaftlichen Fächern in Deutschland charakteristisch*."[6]

In der guten Absicht, es den Lernenden nicht zu schwer zu machen, wird der neue Stoff in kleine bekömmliche Portionen zerlegt und für ein nachträgliches Zusammenfügen der Lernhäppchen bleibt wieder keine Zeit mehr. So entsteht Inselwissen, das zu wenig miteinander vernetzt und deshalb auch nicht flexibel abrufbar und anwendbar ist. Hinzu kommt, dass unseren Schülerinnen und Schülern im Laufe eines auf die Anwendung eines bestimmten Kalküls ausgerichteten Unterrichts der gesunde Menschenverstand partiell abhanden kommt und schematischem Denken Platz macht. Werden in der auf ein Unterrichtsthema folgenden Klassenarbeit entsprechende Aufgaben gestellt, zu denen sogar nur der eine im Unterricht erlernte Lösungsweg akzeptiert wird (das ist hier bewusst zugespitzt formuliert), dann wird

[5] vgl. Neubrand, Johanna (2002).
[6] Expertise „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts" 1997 unter: http://sinus-transfer.uni-bayreuth.de/fileadmin/MaterialienBT/heft60.pdf

dieser den Intentionen mathematischer Allgemeinbildung[7] völlig widersprechende Effekt noch weiter verstärkt.

Unsere Schülerinnen und Schüler sind durchaus nicht überfordert, wenn sie die Möglichkeit erhalten, eigene Lernwege zu gehen und aus verschiedenen Lösungswegen diejenigen auszuwählen, mit denen sie am besten zurechtkommen. Ehrlich verdiente und erarbeitete Erfolgserlebnisse stärken das Schüler-Ich mit weiteren positiven Auswirkungen auf Lernmotivation und Anstrengungsbereitschaft.

Doch es gibt bzgl. beklagter Defizite in der Lernmotivation und Anstrengungsbereitschaft noch weitere mit der Aufgabenkultur zumindest indirekt zusammenhängende Probleme: Solange wir es zulassen, dass vordergründig die Lehrkräfte dafür verantwortlich gemacht werden, wenn ein Schüler oder eine Schülerin eine Fehlleistung erbringt, wird sich an einer eher konsumorientierten Anspruchshaltung im Unterricht kaum etwas ändern!

Benötigt werden Aufgabenstellungen, die es allen Lernenden ermöglichen, einen Einstieg zu finden, wenn sie ein notwendiges Maß an Lernbereitschaft mitbringen. In diesem Sinne gilt es, Erfolgserlebnisse im Unterricht zu ermöglichen. Und es werden Organisationsformen des Umgehens mit Aufgaben benötigt, welche die Schülerinnen und Schüler zur Übernahme von mehr Verantwortung für ihr eigenes Lernen anhalten, vgl. dazu auch die Module 3 und 9.

Fünf Aspekte zur Weiterentwicklung der Aufgabenkultur - Zusammenfassung:

Angesichts der vorgestellten Phänomene und aufgabenbezogenen Wirkungszusammenhänge wird eine **aktuelle Weiterentwicklung der bisherigen Aufgabenkultur** in folgenden fünf Richtungen empfohlen:

1. Bereitstellen und systematisches Einsetzen solcher Aufgabentypen und Aufgabenkontexte im Unterricht, die **nachhaltiges Lernen** von Mathematik fördern, vgl. 2.1.
2. Formulierung von Aufgaben so, dass sie ein hohes **Aktivierungspotenzial** für die Lernenden besitzen, vgl. 2.2.
3. Verstärkte Berücksichtigung solcher Aufgabenformate, die allen Lernenden eine Einstiegsmöglichkeit auf ihrem Leistungslevel gestatten, aber auch weitere Fördermöglichkeiten für Leistungsstärkere bieten, vgl. 2.3.
(Ziel: **Entwicklungsgemäße und entwicklungsfördernde Lernangebote**)
4. Im Unterricht nicht nur Lernanforderungen in Form von Aufgaben mit hohem Lernpotenzial stellen, sondern auch zu deren Bewältigung befähigen (**heuristische Bildung**), vgl. 2.4.
5. Nicht nur Zulassen sondern auch **Fördern und Reflektieren unterschiedlicher Lernwege** in Erarbeitungsphasen sowie verschiedener Lösungswege zu Aufgaben beim Üben und Anwenden bis hin zu Leistungssituationen (im Test). Es geht um ein Initiieren, Begleiten und Auswerten von Aufgabenbearbeitungsprozessen der Lernenden durch die Lehrkräfte so, dass die Lernenden mehr **Verantwortung für ihr eigenes Lernen** übernehmen müssen und dass der individuelle Lernzuwachs bewusst herausgearbeitet wird, vgl. 2.5. und Modul 9.

[7] vgl. Winter,Heinrich (1995).

2. Vorschläge und Beispiele zur Weiterentwicklung der Aufgabenkultur

Im Folgenden werden zu den im 1.Kapitel aufgezeigten 5 Aspekten einer Weiterentwicklung der Aufgabenkultur im Mathematikunterricht theoretisch fundierte und im Unterrichtsalltag erprobte Möglichkeiten vorgestellt.

In den Abschnitten 2.1. und 2.2. geht es vor allem um die Anlage eines hohen Lernpotenzials in Aufgaben verschiedener Typen und Formate sowie Kontexte. Wie das angelegte Lernpotenzial auch effektiv genutzt und bewusst gemacht werden kann, ist Gegenstand der Abschnitte 2.3.- 2.5.

2.1. Welche Aufgabentypen sind zentral für nachhaltiges Lernen von Mathematik?

Identifizierungsaufgabe:

Entscheide bei gegebenen Darstellungen von Zusammenhängen, wann es sich um eine Funktion handelt und wann nicht. Welche Kriterien verwendest du?

Realisierungsaufgaben:

Gib ein Beispiel für einen funktionalen Zusammenhang in der Mathematik und eins aus dem Alltag an sowie ein Beispiel für einen Zusammenhang, der keine Funktion im mathematischen Sinne ist.

Verändere vorgegebene Darstellungen von Zusammenhängen (Graphen, Tabellen, Gleichungen, Wortvorschriften) so, dass mit diesen Darstellungen eine Funktion beschrieben wird.

Nachhaltiges Lernen erfordert einen vielseitigen vernetzenden und mehrperspektivischen aber nicht beliebigen Umgang mit dem Lerngegenstand. Eine markante Schnittstelle für nachhaltiges Lernen befindet sich z.B. im Übergang von der Einsicht oder Entdeckung neuer Zusammenhänge in eine Phase der vielfältigen Übung und Anwendung des neu Gelernten. Wenn an dieser Schnittstelle eine Verankerung des Neuen in Form einer **ersten Übung mit Identifizierungen und Realisierungen** gut gelingt, sind die Voraussetzungen für ein effektives und vielseitiges produktives Üben und Anwenden ungleich größer als ohne diese Verankerung. Von der Struktur her sind beide Aufgabentypen entgegengesetzt angelegt und daraus beziehen sie auch ihre besondere verständnisfördernde Kraft. Solche entgegengesetzt angelegten Aufgabenpaare lassen sich zu jedem bedeutsamen mathematischen Begriff, Zusammenhang oder Verfahren bilden und sind für den individuellen Lernprozess von leistungsstarken und leistungsschwachen Schülerinnen und Schülern gleichermaßen unverzichtbar. Die besondere Funktion dieser Aufgabenformate sollte auch den Lernenden bewusst gemacht werden, indem ihnen z.B. in Vorbereitung auf eine Lernkontrolle empfohlen wird, sich genau solche Fragen der Identifizierung und Realisierung zu stellen und möglichst immer zu einem Positivbeispiel auch ein Gegenbeispiel zu finden.

Eine andere Schnittstelle für einen weiteren Aspekt von nachhaltigem Lernen bieten Anwendungssituationen für Mathematik, die zu einer kritischen Reflexion nicht nur von Lösungswegen sondern auch der Wirkung oder Art der Verwendung von Mathematik im jeweiligen Kontext auffordern, wie das Brauner/Leuders (2006) an Beispielen zeigen.

Man kann nun eine Aufgabentypologie entwickeln, die viele zentrale Aspekte für nachhaltiges Lernen abdeckt und relativ leicht zu handhaben ist[8], vgl. auch Bruder (2003). Es werden im Folgenden acht Aufgabentypen vorgestellt, die sich aus unterschiedlicher Bekanntheit von Anfangs- und Zielsituation und möglichen Lösungswegen ergeben – das sind die drei Komponenten, mit denen jede Aufgabe in ihrer Struktur beschrieben werden kann. Unter den *Komponenten* einer Aufgabe sollen hier verstanden werden:

1. Die *Anfangssituation*: Voraussetzungen, gegebene Größen, Informationen zu einem Sachverhalt o. ä.

2. *Transformationen*, die die Anfangssituation in die Endsituation überführen, bzw. die von dem Gegebenen zum Gesuchten hinführen: Lösungsweg(e), mathematische Modelle, Beweiskette...

3. Die *Endsituation*: Gesuchtes, Behauptung, Schlussfolgerungen, Resultate usw.

Das ist nun keineswegs neu. Weniger bekannt ist jedoch folgendes: Jeder dieser acht Typen kann mit spezifischen Funktionen für den Lernprozess interpretiert werden und diese Funktionen ergänzen sich gegenseitig. Man kann durch langjährige Unterrichtserfahrungen gestützt davon ausgehen, dass dann, wenn es gelingt, allen acht Typen im Laufe einer Unterrichtsreihe angemessenen Raum zur Bearbeitung zu geben, nachhaltiges Lernen von Mathematik deutlich gefördert wird. Die in der Tabelle 1 angegebenen Aufgabentypen entstehen, wenn man alle Möglichkeiten durchspielt, wie die drei Komponenten einer Aufgabe belegt sein können.

<u>Tabelle 1: Acht zentrale Aufgabentypen für nachhaltiges Lernen mit Beispielen</u>

Gegebenes	Transformationen	Gesuchtes	Bezeichnung des Aufgabentyps	Beispielaufgabe
X	X	X	gelöste Aufgabe, Musteraufgabe Aufgabe zur Fehlersuche	- Stimmt das?... - Wo steckt der Fehler?
X	X	-	einfache Bestimmungs-Aufgabe (**Grundaufgabe)**	Löse die quadratische Gleichung $3x^2-7x=8$ Kopfrechenaufgaben Berechne das Volumen einer Halbkugel mit dem Radius von 5 cm.
-	X	X	einfache **Umkehraufgabe**	Gib eine quadratische Gleichung an, die 2 und -3 als Lösungen hat. Bestimme den Radius einer Kugel, die ein Volumen von 30cm³ hat Zahlenrätsel: Mit einer gedachten Zahl werden

[8] Aufgaben kann man unter den vielfältigsten Gesichtspunkten typisieren, vgl. z.B. auch Girmes(2003).

				bestimmte bekannte Rechenoperationen ausgeführt und das Ergebnis wird genannt. Die gedachte Zahl soll bestimmt werden.
X	-	X	Beweisaufgabe, Spielstrategie finden	Beim Nimm-Spiel [9] gewinnt Frank immer. Wie macht er das? Warum ist die Formel zur Lösung quadratischer Gleichungen richtig ?
X	-	-	schwere Bestimmungsaufgabe, auch: Teil einer gestuften Aufgabe (Blütenmodell)	Ist eine Tetra-Pack-Milchtüte verpackungsoptimal gestaltet?
-	-	X	schwierige Umkehraufgabe, Modellierungsproblem mit Zielvorgabe	Ein Teich soll eine Fläche von ca. 10m² erhalten.
-	X	-	Aufforderung, eine Aufgabe zu einem gegebenen mathematischen Werkzeug zu erfinden	Erfinde Beispielaufgaben zu den drei typischen Fragestellungen der Prozentrechnung
(-)	-	-	Problemsituation mit offenem Ausgang (Trichtermodell)	Führe eine Befragung zu einem gegebenen Thema bei Deinen Mitschülern durch und stelle die Ergebnisse vor.

Mit *Komponentenbelegung* ist die Antwort auf die Frage gemeint, ob alle erforderlichen Größen oder Voraussetzungen bekannt sind (x), oder nicht (-), ob ein möglicher Lösungsweg bekannt, in der Aufgabenstellung mit genannt oder bereits vorgegeben ist (x) oder nicht (-), ob die (bislang immer oder “üblicherweise”) zu berechnenden Größen oder die Behauptung bereits vorgegeben sind (x) oder nicht (-).

Der Einfachheit halber soll hier nur zwischen belegt/bekannt (x) und nicht bekannt oder nicht explizit gegeben (-) unterschieden werden. Dann ergeben sich die acht Kombinationen und damit acht Aufgabentypen, die sich in ihrem Handlungsziel recht deutlich voneinander unterscheiden. Über den Schwierigkeitsgrad einer Aufgabe sagt diese Typisierung noch wenig aus, der Spielraum ist recht groß, wie die Beispiele zu den Grundaufgaben zeigen.

Diese Aufgabentypisierung ist jedoch sehr gut geeignet zu prüfen, wie vielseitig oder auch wie kopflastig sich der eigene Unterricht hinsichtlich der Aufgabenauswahl darstellt.
Eine größere Aufgabenvielfalt im Sinne der acht Strukturtypen führt nachweislich auch zu einer größeren methodischen Vielfalt in der Unterrichtsgestaltung und bietet den Lernenden

[9] Es liegen 20 Streichhölzer auf dem Tisch. Zwei Spieler spielen gegeneinander. Gewonnen hat derjenige, der das letzte Streichholz nehmen kann, wenn entweder ein, zwei oder drei Hölzer pro Zug genommen werden dürfen.

Gelegenheit zu tieferem Verstehen der Lerninhalte weit über ein formales Reproduzieren und Anwenden hinaus.

Besonders interessant wird diese Tabelle dann, wenn man versucht, zu einem gegebenen Thema Aufgaben aller 8 Typen zu konstruieren. Dabei wird deutlich, dass die verschiedenen Aufgabentypen jeweils mit bestimmten Aspekten des Lernens im Sinne von Verstehen und Anwenden korrespondieren: Man hat das Wesen eines Verfahrens oder einer Methode viel besser verstanden, wenn man in der Lage ist, Situationen anzugeben, bei denen das neue Verfahren sinnvoll angewendet werden kann. Darüber hinaus sollten die Anwendungsbedingungen auch thematisiert werden. Die Lernenden werden dazu aufgefordert eine (nicht triviale) Situation anzugeben, in der das neue Verfahren **nicht** angewendet werden kann. Bekannt ist dieser Aufgabentyp z.B. aus dem Spiel TABU, bei dem Begriffe unter Ausschluss bestimmter Wörter beschrieben und von den Mitspielern erraten werden müssen.
Ein anderes Beispiel: Konstruiere einen quadratischen Term, der **nicht** mit Hilfe binomischer Formeln vereinfacht werden kann.

Mit Hilfe dieser acht Aufgabentypen kann etwas gelingen, das aus lernpsychologischer und erziehungswissenschaftlicher Sicht immer wieder gefordert wird: Ein Wechsel der Blickwinkel und Vernetzungen innerhalb eines Themas. Deshalb sollten in jeder Unterrichtseinheit möglichst alle acht Aufgabentypen insbesondere auch für eine selbständige Bearbeitung durch die Lernenden vorkommen – allerdings mit unterschiedlicher Gewichtung. Die acht Typen decken verschiedene Schwierigkeitsgrade ab und enthalten einen hohen Reflexionsanteil durch die Fragen zur Zielumkehr (- x x), (- - x) und den Aufgabentyp zum Selberkonstruieren von Aufgaben (- x -). Aber auch das Untersuchen einer bereits gelösten Aufgabe auf mögliche Fehler bietet die Möglichkeit, vertiefte Einsichten über den Lerngegenstand zu gewinnen.
Beispiele für diese Aufgabentypen und eine Suchmöglichkeit nach solchen Aufgabentypen für die üblichen Unterrichtsthemen der Sekundarstufe I werden in der Aufgabendatenbank www.madaba.de angeboten.

Nach den bisherigen Erfahrungen zur Unterrichtsplanung mit Hilfe der acht Strukturtypen für Aufgaben hat sich eine Zeitaufteilung von 1:2 für den Anteil der Grundaufgaben als elementare Bestimmungsaufgaben (x,x,-) im Verhältnis zu den Umkehrungen (-,x,x), Erweiterungen und Verknüpfungen von Grundaufgaben sowie zum Erfinden von Aufgaben bewährt. Für Problemaufgaben und Problemsituationen sollte dann mindestens genauso viel Zeit eingeplant werden, wie für das Bearbeiten von Grundaufgaben in der Stoffneuerarbei-tung vorgesehen wurde.

2.2. Lernaufforderungen mit hohem Aktivierungspotenzial ausstatten

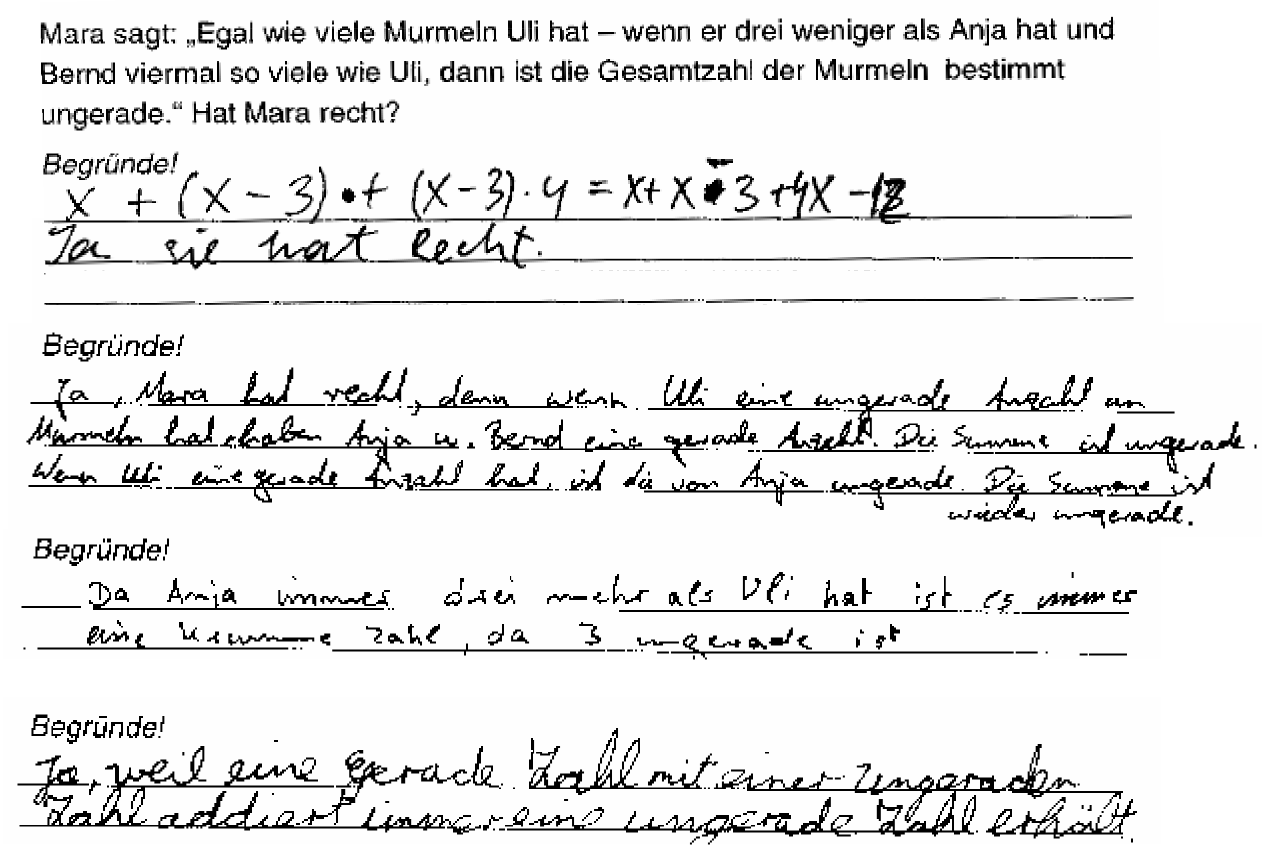
Die Frage, wann eine gegebene Aufgabe eine „gute“ Aufgabe ist, lässt sich nicht so einfach beantworten, weil in einem lebendigen Unterricht aus jeder noch so unscheinbaren Aufgabe durch Variation von Inhalten und Fragestellungen sowie eine geschickte Einbettung in einen ansprechenden Kontext durch die Lehrkraft ein beachtlicher Lernzuwachs gelingen kann, ob nun historisch, aktuell lebensweltbezogen, technisch oder als Rätsel oder Spiel.

Beispielsweise lässt sich das **Aktivierungspotenzial** einer Aufgabe deutlich erhöhen, wenn motivationspsychologische Aspekte für die jeweilige Altersstufe bereits in der Art der Fragestellung berücksichtigt werden:

Es ist bekannt, dass sich die Begeisterung der Lernenden eher in Grenzen hält, wenn im Mathematikunterricht z.B. einer 7. Klasse ausführliche verbale Begründungen gefordert werden für einen gewählten Lösungsweg. Andererseits muss es gelingen, geeignete Lernanlässe zu schaffen für logisch stringente Verbalisierungen, weil über alle Schulformen hinweg die

Argumentationskompetenz unserer Schülerinnen und Schüler doch sehr zu wünschen übrig lässt. Auch Detailanalysen zu Aufgaben aus der Pilotierung zur PISA-Studie 2003 belegen dies nachdrücklich.

Hier ein Beispiel für eine Aufgabe aus dem mathematischen Ergänzungstest PISA 2003 mit einzelnen Schülerlösungen:



Mara sagt: „Egal wie viele Murmeln Uli hat – wenn er drei weniger als Anja hat und Bernd viermal so viele wie Uli, dann ist die Gesamtzahl der Murmeln bestimmt ungerade." Hat Mara recht?

Begründe!

$x + (x-3) \cdot + (x-3) \cdot 4 = x + x - 3 + 4x - 12$

Ja sie hat recht.

Begründe!

Ja, Mara hat recht, denn wenn Uli eine ungerade Anzahl an Murmeln hat haben Anja u. Bernd eine gerade Anzahl. Die Summe ist ungerade. Wenn Uli eine gerade Anzahl hat, ist die von Anja ungerade. Die Summe ist wieder ungerade.

Begründe!

Da Anja immer drei mehr als Uli hat ist es immer eine krumme Zahl, da 3 ungerade ist

Begründe!

Ja, weil eine gerade Zahl mit einer ungeraden Zahl addiert immer eine ungerade Zahl erhält

Erfolgreiche Möglichkeiten für eine aktivitätsfördernde Aufforderung zum Verbalisieren bestehen darin, dass den Lernenden im mathematischen Kontext **Beratungs- oder Entscheidungskompetenz** zugetraut wird.

In unserem obigen Beispiel können diese realen Lösungen den Lernenden vorgelegt werden mit der Aufgabe, sie zu verstehen und zu kommentieren. Die motivationale Situation ändert sich grundlegend!

> **-Stelle fest, wer die Aufgabe richtig gelöst hat und gib denjenigen, die Fehler gemacht haben, Tipps, wie sie es besser machen können!**
>
> Oder:
>
> **- Vergleiche die gegebenen Lösungswege miteinander. Worin unterscheiden sich die Argumentationen?**

Den Lernenden Beratungskompetenz zuzutrauen wird auch bei der folgenden Aufgabe zur Erläuterung der KMK-Bildungsstandards für die Hauptschule[10] im Teil b) umgesetzt:

[10] http://www.kmk.org/schul/Bildungsstandards/Hauptschule_Mathematik_BS_307KMK.pdf

Familie Schmidt möchte auf ihrem Grundstück eine Terrasse anlegen. Sie soll die Form eines Rechtecks haben, kann aber auf Grund bestehender Anpflanzungen maximal 7 m lang und höchstens 5 m breit werden.

a) Zur Vorbereitung der Pflasterung wird diese Fläche einen halben Meter tief ausgeschachtet. Wie viel Kubikmeter Erde fallen an?

b) In dem Werbeprospekt eines Baumarktes findet Familie Schmidt ein Angebot für Terrassenplatten verschiedener Größe. Familie Schmidt möchte nur ganze Platten einer Größe verlegen.

Was würdest du Familie Schmidt empfehlen? Begründe deine Entscheidung.

Angebot: Plattenmaß	*35 cm x 35 cm*	*2,50€ pro Stück*	*oder*
	40 cm x 40 cm	*2,90€ pro Stück*	

Eine weitere Variation dieser Aktivierungsmöglichkeit besteht darin, dass (zwei) unterschiedliche Behauptungen vorgestellt werden und die Frage lautet:

Wer hat Recht? Warum?

Beispiel – Käsleinaufgabe Klasse 6[11]:

Eines Abends, nachdem die zwei Hirten Fridolin und Gottlieb ihre Schafe in den Stall getrieben hatten, setzten sie sich in den Graben der Landstraße, um ihr Abendbrot zu essen.
Gottlieb hatte 5 Käslein und Fridolin nur 3. Genau in diesem Moment kam ein vornehmer Herr des Weges und gesellte sich zu ihnen. Er fragte, ob sie ihr Essen mit ihm teilen würden, er würde natürlich auch zahlen. So aßen sie jeder gleich viel, lachten und schwatzten.
Schließlich musste der Graf weiter, bedankte sich und entlohnte die beiden Hirten für die Käslein mit 8 Talern. Nachdem der Herr weg war, brach unter den beiden Hirten der Streit aus.
Wie sollten sie die Taler gerecht teilen?
Gottlieb schlug vor: Jeder solle so viele Taler bekommen, wie er Käslein mit hatte. Fridolin meinte, das Geld müsse so geteilt werden, dass jeder 4Taler bekäme. Die beiden wurden sich nicht einig und mussten vor den weisen Richter.
Stell Dir vor, Du bist der weise Richter: Wie muss man das Geld teilen, damit Gerechtigkeit einkehrt? Gibt es noch eine bessere Aufteilung als die Vorschläge der beiden Hirten?

Eine gerechte Aufteilung entsprechend den mitgebrachten und selbst gegessenen Käslein wäre, dass Gottlieb sieben und Fridolin nur einen Taler bekommt. Fridolin hätte also mit Gottliebs Vorschlag besser einverstanden sein sollen, als zum Richter zu gehen.

Verfremdungen in Form von Rätseln besitzen in den unteren Klassen eine große Faszination. Eine Erweiterung der Käsleinaufgabe könnte in der Frage bestehen, selbst nach gerechten Aufteilungssituationen im Alltag zu suchen, wobei Gerechtigkeit immer wieder neu definiert werden muss, vgl. auch die Vereinsbeitragsaufgabe in Biermann/Blum (2001).

---

[11] Eine historische Aufgabe, dokumentiert in www.madaba.de

In einer weiteren Variation kann es sich auch um einen Zeitungsartikel oder um eine grafische Darstellung handeln, in dem sich einige Ungereimtheiten befinden[12].

In der nebenstehenden Abbildung eines Zeitungsausschnittes sieht man die Graphik eines deutschen Versicherers.[13] Man kennt aber nicht die Zahlen eines anderen, geschweige denn die Gesamtzahlen für Deutschland. Hier könnte man vorschnell verallgemeinern. Außerdem sind nur die absoluten Zahlen dargestellt. Welche Personengruppe könnte bei diesem Versicherer Mitglied sein?
Dabei muss man beachten, dass insgesamt bestimmt mehr Deutsche Fußball spielen oder Joggen als Tennis spielen oder Biken. So ist es auch nicht verwunderlich, wenn es beim Fußball relativ viele Unfälle gibt. Über den prozentualen Anteil wird nichts gesagt.

Eine Aufgabe kann dann z.B. lauten:

> **Schreibe einen Leserbrief und kläre die Zusammenhänge auf!**
>
> Oder auch:
>
> **Stelle dem Autor Fragen zu seinen Angaben!**

Diese mit geringem Aufwand zu realisierenden Variationen in den Fragestellungen lassen für viele Schülerinnen und Schüler die Hürde, sich auf eine Anforderung einzulassen, niedriger werden. Eine Ursache dafür besteht im Herstellen eines positiven Bezuges zu ihrer eigenen Person (Zutrauen von Beratungs- oder Entscheidungskompetenz, Ermunterung) bzw. zu ihren Mitschülern (soziale Motivation), was die Lernbereitschaft spürbar fördern kann.

2.3. Entwicklungsgemäße und entwicklungsfördernde Lernangebote für alle bereit stellen

Eine besondere Schwierigkeit schöner und anspruchsvoller Aufgaben in den (älteren) Lehrbüchern besteht darin, dass für viele Schülerinnen und Schüler die Einstiegshürde zu hoch ist. Einige Lernende sind oft nicht bereit, sich mit einem komplexen Problem selbständig auseinander zu setzen, wenn sie keinen direkten Zugang sehen und sich überfordert fühlen. Auch wenn wir uns hier mehr Ausdauer und Anstrengungsbereitschaft wünschen: Dieser Situation muss methodisch geeignet Rechnung getragen werden, ohne sie zu zementieren. Dazu führt kein Weg an einer möglichst wenig aufwändigen und handhabbaren Binnendifferenzierung vorbei, mit der folgendes Ziel erreicht werden soll:

Sind Aufgaben in einer konkreten Lernsituation für das Individuum **entwicklungsgemäß** und **entwicklungsfördernd,** können sie als bewältigbare Herausforderung angenommen werden.

---
[12] Schöne Anregungen für solche Aufgaben bieten auch Herget/Scholz (1989).
[13] Gefunden von Christine Döring, dokumentiert in www.madaba.de

2.3.1. Arbeiten mit Wahlaufgaben

Eine Möglichkeit zur methodischen Bewältigung des Problems sind **Wahlaufgaben.** Um die Eigenverantwortlichkeit der Schülerinnen und Schüler für ihr Lernen zu stärken, ist nicht zu empfehlen, bestimmten Schülerinnen und Schülern jeweils spezielle Aufgaben zuzuordnen. Sicherlich gibt es Beratungsbedarf bis sich die meisten Lernenden realistisch einschätzen können und ein für sie angemessenes Einstiegesniveau auf einem Aufgabenblatt finden, aber zum Übertragen von Eigenverantwortung bei der Schwierigkeitsauswahl gibt es langfristig keine Alternative.
Organisatorisch gibt es verschiedene Wege zur **Binnendifferenzierung mit Wahlaufgaben,** zwei sollen hier genannt werden:

- Bei (meist innermathematischen formalen) Übungsaufgaben mit schrittweise aufsteigender Schwierigkeit empfiehlt es sich, eine bestimmte Anzahl von Aufgaben zu bestimmen, die in einer verabredeten Zeit bearbeitet werden soll. Man gibt ein Arbeitsblatt mit z.B. 10 Aufgaben zu Nullstellenberechnungen von Funktionen vor mit aufsteigender Schwierigkeit. Leistungsschwächere Lernende beginnen dann mit den ersten und noch besonders einfachen Aufgaben und kommen in der gegebenen Zeit so weit wie sie es schaffen, während leistungsstärkere Lernende die ersten Aufgaben weglassen können, um bereits mit einem höheren Schwierigkeitsgrad einzusteigen. Hierfür bedarf es auch individueller Ermunterung, damit möglichst viele Lernende ernsthaft versuchen, ihre Leistungsmöglichkeiten auszuschöpfen.

- Für Anwendungsaufgaben und entsprechende Hausaufgaben empfiehlt sich die Markierung der Aufgaben auf einem Arbeitsblatt mit Sternchen o. ä. zur Orientierung der Lernenden über das Anforderungsniveau der einzelnen Aufgaben. Es wird wieder eine bestimmte Zahl Aufgabenbearbeitungen erwartet, aber auf mindestens zwei Anforderungsniveaus. Die Schülerinnen und Schüler können sich dann ihr Programm selbst zusammen stellen – entweder mit * beginnen und langsam steigern oder gleich mit ** starten, um vielleicht auch noch eine Kniffelaufgabe mit **** zu knacken. Vgl. auch die Anlage mit dem Hausaufgabenbeispiel.

Ein Arbeiten mit Wahlaufgaben ist aufwändig in der Vorbereitung und verlangt für das Vergleichen von Ergebnissen und Aufklären von Fehlerquellen bei einer größeren Aufgabenvielfalt ein sehr gutes Organisationsmanagement in der Klasse. In höheren Klassen empfiehlt sich das Arbeiten mit Lösungsblättern zum individuellen Ergebnisvergleich und die Lernenden werden z.B. aufgefordert, in Partnerarbeit auf Fehlersuche zu gehen.

2.3.2 Selbstdifferenzierende Aufgaben – „Blütenmodell“

Eine mögliche Alternative bzw. Ergänzung zum Arbeiten mit Wahlaufgaben stellen solche Aufgaben dar, die von selbst bzw. in sich binnendifferenzierend sind.
Es bietet sich daher ein Aufgabenformat an, das niedrigschwellig ist, also eine erste Teilaufgabe mit Grundaufgabenniveau hat, welches für alle Lernenden bewältigbar erscheint. In weiteren zwei bis drei Teilaufgaben (möglichst nicht mehr!) sollte das Anforderungsniveau schrittweise steigen von der Komplexität und dem Ausführungsaufwand her. Die Fragestellungen können auch offener, also weniger stark den Lösungsweg als auch das Resultat bestimmend angelegt werden. Das Beispiel mit der Terrasse im Kapitel 2.2. hat bereits dieses Format und lässt sich weiter anreichern. Im folgenden Beispiel wird im Teil c) die Kreativität gefördert und die Lernenden können die Aufgabe entsprechend ihren Möglichkeiten und nach ihrem Anspruchsniveau bearbeiten.

Beispiel für Klasse 5[14]:

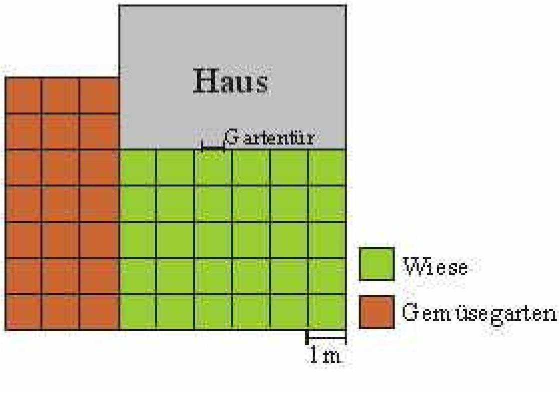
Kurz nach ihrem Umzug beginnt Familie Winkler über die Nutzung ihres Gartens zu streiten. Frau Winkler möchte endlich genügend Platz für einen Gemüsegarten haben, Herr Winkler träumt schon seit langem von einem großen Teich, und die Kinder wünschen sich eine große Wiese auf der sie spielen und ihre Meerschweinchen laufen lassen können.

Die Abbildung zeigt einen Plan des Gartens.

a) Gib an wie viele Teile des Gartens derzeit Wiese und wie viele Gemüsegarten sind.

b) Berechne den Flächeninhalt des Gartens.

c) Stell Dir vor, Du bist Landschaftsgärtner. Mache der Familie einen Vorschlag, wie Du ihren Garten gestalten würdest. Versuche dabei alle Wünsche zu berücksichtigen.

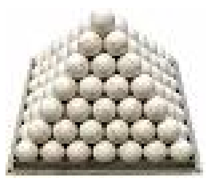


Ein solcher Aufbau einer Aufgabe lässt sich (nach Schupp) mit dem Wachsen einer blühenden Pflanze vergleichen, die sich schrittweise in verschiedene Richtungen entwickelt. Schupp (2003) empfiehlt auch, Aufgabenvariationen gemeinsam mit den Lernenden vorzunehmen, was als nächst höheres Professionalisierungslevel im Umgang mit Aufgaben angesehen werden kann.

Aufgabenvariationen sind jedoch kein Selbstzweck. Wie solche Variationen und Öffnungen zielgerichtet erfolgen können, beschreiben Biermann/Wiegand/Blum(2003) am Beispiel einer Anwendung zu quadratischen Gleichungen.

Das Variieren von Aufgaben durch die Lernenden lässt sich in Vorbereitung auf eine Lernkontrolle gut begründen: Wenn man in der Lage ist, selbständig eine Aufgabe umzuformulieren, einen anderen Aspekt in die Fragestellung zu bringen, dann gibt es weniger Probleme mit ungewohnten Aufgabenstellungen. Es kann leider immer wieder beobachtet werden, dass viele Schülerinnen und Schüler auf eine bestimmte Art der Fragestellung fixiert sind und sich bereits bei kleinen Formulierungsänderungen hilflos fühlen. Bei einem Lehrerwechsel können solche Phänomene besonders deutlich auftreten. Um mehr Flexibilität zu gewinnen, sollten die Schülerinnen und Schüler explizit lernen, wie man sinnvolle Fragen stellen kann bzw. wofür man sich in den einzelnen Wissenschaftsdisziplinen überhaupt interessiert.

Ein Beispiel: **Kugliges[15]**



(1) Das Bild zeigt eine Pyramide aus Golfbällen.

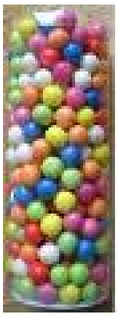
a) Aus wie vielen Bällen besteht die Pyramide?
b) Wie hoch ist eine neun-stufige Pyramide?
c) Ermittle, wie hoch eine n-stufige Pyramide wird!

(2) Überlege, wie man 3 Golfbälle verpacken kann! Entwirf ein Modell und erkläre, warum du dich dafür entschieden hast!

---

[14] Nach einer Idee von Nina Kaiser, dokumentiert in www.madaba.de

[15] Aufgabe ausgearbeitet von Andrea Vögler in www.madaba.de



(3) Ein beliebtes Partyspiel ist das Raten der Anzahl von Kaugummis in einem Gefäß.

Finde heraus, wie viele Kaugummis in ein zylinderförmiges Gefäß passen, wenn der Innendurchmesser 9 cm und die Höhe 22 cm beträgt. Schätze zunächst und versuche dann eine rechnerische Abschätzung vorzunehmen!

Die besondere Eignung offener Aufgaben vom Typ „Blütenmodell“ ergibt sich jedoch nicht nur aus der niedrigen Einstiegshürde für lernschwächere Schülerinnen und Schüler sondern auch aus dem Förderpotenzial für Leistungsstärkere. „Blütenaufgaben“ sind selbst differenzierend, wenn man eine bestimmte Bearbeitungszeit vorgibt und die Lernenden auffordert, selbständig oder auch in Partnerarbeit so viele Teilaufgaben wie möglich „zu schaffen“ in dieser Zeit.

Es gehört aber auch dazu, langfristig für ein Lernklima zu sorgen, bei dem es selbstverständlich ist, nicht nur die leichteste Aufgabe zu versuchen und dann aufzuhören, sondern sein Potenzial auszuschöpfen und die Lernzeit im Unterricht effektiv zu nutzen.

Je nach Zeitrahmen und Lernzielen können Teilaufgaben weggelassen oder ergänzt werden. Die Aufgabe „Kugliges“ in der vorgelegten Form eignet sich auch als längerfristige Hausaufgabe mit einer Präsentation, die kreatives Potenzial vieler Lernender erschließen hilft. Das Einpacken von Golfbällen kann auch zu dem schon recht anspruchsvollen Problem einer Umkugel führen, das z.B. für vier Bälle von besonderem Interesse ist. Solche Aufgabenvariationen sind nach „oben offen“.

Vergleiche von Ergebnissen und Lösungswegen müssen auch nicht frontal und damit oft sehr zeitintensiv erfolgen sondern sind anhand von vorgefertigten Lösungsfolien oder der Diskussion von Schülerlösungen auch in Lerngruppen sehr gut möglich und sinnvoll. In einer abschließenden knappen Reflexion im Klassenverband werden nur noch Schwierigkeiten und offene Fragen aus den Lerngruppen zusammen getragen und durch die Lehrkraft die wichtigsten Ideen und Erkenntnisse zur Aufgabe zusammengefasst und fixiert (Folie, Tafel, Plakat).

Wo kann man Anregungen für reichhaltige Aufgaben bekommen?

Neben vielen neueren Unterrichtsmaterialien, auch Lehrbüchern, die eine moderne Aufgabenkultur zunehmend unterstützen, bieten die SINUS-Materialien wertvolle Anregungen. In einer bereits aufbereiteten Form findet man entsprechende Aufgaben insbesondere zur Sekundarstufe I in der Aufgabendatenbank www.madaba.de sowie in der Aufgabendatenbank SMART unter http://btmdx1.mat.uni-bayreuth.de/smart/.

2.4. Strategien und Hilfsmittel zum Lösen schwieriger Aufgaben

Selbst bei vielseitigster und ausgewogenster Aufgabenauswahl ergeben sich folgende Fragen:
Reicht es tatsächlich aus, die Schülerinnen und Schüler lediglich mit einer anderen Art von Lernanforderungen zu konfrontieren (wenn nicht mehr ein bestimmter Lösungsweg erwartet oder gar vorgeschrieben wird) und dann einfach zu hoffen, dass diese auch bewältigt werden? Wie kann ein (natürlich immer individueller) Leistungszuwachs beim Problemlösen mit mathematischen Mitteln im Sinne des oben beschriebenen Aufgabenverständnisses erreicht werden?

Unterbestimmte Aufgabensituationen oder nachträgliches Öffnen zunächst vorstrukturierter Aufgaben bieten **Spiel**räume für Lösungsansätze. Aber kennen die Lernenden auch die **Spiel**regeln? Haben sie im Mathematikunterricht Gelegenheit erhalten, entsprechende Qualifikationen für das Füllen dieser Spielräume zu erwerben?

Folgender zentraler Zusammenhang sollte deshalb sorgfältig durchdacht und beachtet werden:

“ Im Unterricht nicht nur Lernanforderungen stellen,
sondern auch zu deren Bewältigung befähigen”.

Neben einem flexiblen und vernetzten Grundwissen und entsprechendem Können sowie einer positiven Lerneinstellung werden **fachspezifische und allgemeine Methoden und Techniken zum Problemlösen** mit mathematischen Mitteln benötigt.

Dieser Bereich wird auch mit ***“heuristischer Bildung”*** umschrieben.
Heuristischer Erfahrungsgewinn bedeutet einen Zuwachs an Methodenwissen und Methodenbeherrschung auf einer Metaebene - nämlich als individuell verfügbares Auswahlfeld möglicher Vorgehensweisen beim Problemlösen mit mathematischen Mitteln.
Zu diesem Thema wird auf ein spezielles kostenfreies Fortbildungsangebot unter www.prolehre.de in Form eines halbjährlichen Internetkurses mit 6 vierzehntägig eingestellten Lernmodulen zum Kennenlernen der Heurismen und zur Unterstützung eigener Erprobungen mit einem reichhaltigen Materialangebot unter www.problemloesenlernen.de verwiesen.

2.5. Das Lernpotenzial einer Aufgabe nutzen und den Lernzuwachs bewusst machen – Reflexionsanlässe bieten

Entscheidend für nachhaltiges Lernen von Mathematik ist nicht allein eine geschickte Aufgabenauswahl oder Aufgabenkonstruktion sondern die Art und Weise, wie es gelingt, das Lernpotenzial der Aufgabe wirksam werden zu lassen. Anders ausgedrückt: Es geht darum, dass **anhand einer reichhaltigen Aufgabe auch möglichst viel gelernt** wird!

Interessant sind für die folgenden Überlegungen besonders Aufgaben mit gestuften Anforderungen (Blütenmodell) bzw. solche mit insgesamt höherem Anspruchsniveau, z.B. offene und geschlossene Problemaufgaben.

Unabhängig davon, welche Organisationsform gewählt wurde für das Vorstellen bzw. Vergleichen von Lösungswegen und Resultaten sollte am Ende einer komplexen Aufgabenbearbeitung folgende Frage stehen:

Was hat uns geholfen, das Problem zu lösen?

Antworten auf diese Frage werden in zwei Richtungen erwartet – einmal bezüglich der verwendeten mathematischen Werkzeuge (Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren) und zum anderen bezüglich der genutzten heuristischen Hilfsmittel (Informative Figur, Tabelle, Gleichung) und Strategien (Vorwärts- Rückwärtsarbeiten, Analogie- oder Rückführungsprinzip, Zerlegungsprinzip usw., vgl. Bruder (2000).

Eine Aufgabe zur Erläuterung der Bildungsstandards für den Hauptschulabschluss[16] enthält ein Bild mit einem großen Fass, das von verschiedenen Personen bewegt wird. Die Frage lautet:

Wie viel Flüssigkeit passt ungefähr in dieses Fass? Begründe deine Antwort.

Folgende Erkenntnisse können am Ende der Bearbeitung einer solchen Aufgabe bewusst herausgestellt werden:

Welche Strategien waren nützlich?

- **Rückführung auf Bekanntes:** Fass mit einem Zylinder oder Quader vergleichen oder annähern
- **Vergleichsgrößen finden:** Mit der mittleren Größe eines Menschen die Maße vom Fass anhand des Bildes grob abschätzen (Idee des Messens)

Welche Mathematik hat uns geholfen die Aufgabe zu lösen?

- Formeln zur **Volumenberechnung** (Quader, Zylinder)

Eine kurze Reflexionsphase mit einem solchen Ergebnis bedarf einer klaren Orientierung durch die Lehrkraft und kann in der Regel ohne langfristige Gewöhnung und Erfahrung nicht den Lernenden allein überlassen werden.

Eine weitere Möglichkeit, das Lernpotenzial gestellter Aufgaben auch den Lernenden selbst bewusst werden zu lassen, bietet folgende Fragestellung bereits am Ende einer ersten Übungsphase zu einem neuen Thema:

Was ist das Gemeinsame aller Beispielaufgaben, die wir zuletzt bearbeitet haben?

> Beispiele für Schülerantworten: Bei allen Aufgaben konnte man mit den Strahlensätzen rechnen, weil immer nach Abschnitten auf geschnittenen Parallelen gefragt war; es ging immer um Pyramiden oder Teile davon; es ging immer darum, irgendeinen Abstand auszurechnen, aber das ist ganz unterschiedlich möglich.

Worin unterscheiden sich die bearbeiteten Aufgaben voneinander?

> Beispiele für Schülerantworten: Man musste bei einigen Aufgaben rückwärts vorgehen, weil das gefragt war, was sonst immer gegeben war; die Zahlenrechnungen wurden immer schwieriger; obwohl der Text jedes Mal ein anderer war, blieb der Rechenweg derselbe.

Solche Vergleichsaufforderungen sind geeignete Teilaufgaben auch in einer Hausaufgabe oder im Rahmen eines Lerntagebuchs. Sie kosten wenig Zeit in der Bearbeitung und im Vergleich, fördern aber den Blick auf das Wesentliche, das im Unterricht gelernt werden soll.

Die oben genannten Schülerantworten lassen gut erkennen, um welche Art von Aufgabenarrangement es sich handelte – war es eine Aufgabenplantage von einem Typ, um erste Si-

[16] http://www.kmk.org/schul/Bildungsstandards/Hauptschule_Mathematik_BS_307KMK.pdf

cherheit mit einem neuen Verfahren zu gewinnen oder ging es bereits um ein komplexes Üben und Anwenden über den aktuellen neuen Lerninhalt hinaus. Beides hat seine Berechtigung, aber von der Schwerpunktsetzung sollten sich die Aufgabenangebote stärker in Richtung komplexer Übungen und Anwendungen bewegen, weil diese bisher oft zu kurz kommen.

Es hat sich bewährt, wenn die Lernenden schrittweise daran gewöhnt werden, bei einem Problem zunächst gedanklich ein wenig zurück zu treten und folgende Fragen für sich zu beantworten:

Worum geht es in dieser Aufgabe?

Was weiß ich schon im Zusammenhang mit diesem Problem?

Welche Methoden und Techniken stehen mir zur Verfügung?

Hier schließt sich der Kreis zur Reflexion des Vorgehens am Ende einer Aufgabenbearbeitung.

Gelingt es, im Anschluss an eine komplexe Aufgabenbearbeitung herauszufiltern, welche mathematischen Werkzeuge und welche Strategien hilfreich waren, lassen sich diese so bewusst gemachten Erfahrungen wieder bei einer neuen Aufgabensituation heranziehen. Auf diese Weise baut sich aus der bisherigen Aufgabenlöseerfahrung langfristig ein Wissensspeicher auf, aus dem Elemente zur Verfügung stehen zur Beantwortung der neuen Fragen. Dabei tritt ein nicht zu unterschätzender psychologischer Nebeneffekt auf: Die Lernenden fühlen sich nicht mehr so hilflos einem Problem ausgeliefert – auch wenn die heuristischen Strategien noch keine Lösungsgarantie liefern. Aber sie weisen Wege, die man einmal ausprobieren kann.

Nachdem versucht wurde eine Aufgabe zu lösen – möglichst zunächst allein, dann im Austausch mit dem Lernpartner und anschließendem Vergleich in einer Gruppe oder im Klassenverband – und Resultate sowie (unterschiedliche) Lösungswege vorliegen, geht es darum explizit herauszuarbeiten, worin der Lernzuwachs dieser Aufgabe besteht. Damit soll unterstrichen werden, dass das in einer Aufgabe angelegte Lernpotenzial im Unterricht nicht automatisch zum Tragen kommt sondern noch einer methodischen Explizierung bedarf. Allein mit einem „Abarbeiten“ von Aufgabenplantagen aus standardisierten Tests wird der potenziell mögliche Erkenntniszuwachs bei den Lernenden nicht erreicht werden können.
Offene Aufgaben – insbesondere mehrschrittige, bei der wie eine Blüte aus einer elementaren geschlossenen Teilaufgabe weitere Teilaufgaben mit offenem Ende herauswachsen, sind durch ihre Selbstdifferenzierung für Übungsprozesse sehr gut geeignet und bieten sich ebenso – nur mit einer gewissen Einschränkung der Ergebnisoffenheit - für (standardisierte) Tests an. Ergebnisoffene, kreative und mit kommunikativen Elementen versehene Fragestellungen, die so nicht in einem Test vorkommen werden, sind aber gerade ein wesentliches Element, mit dem die Schülerinnen und Schüler lernen können, sich so flexibel in einem Themenfeld zu bewegen, dass sie dann in Testsituationen entsprechend unblockiert agieren können.

Derzeit überwiegt das Stellen von Aufgaben durch die Lehrenden und das Lösen dieser Aufgaben durch die Lernenden. Das wird von allen Beteiligten meist auch so erwartet. Welchen Nutzen hätte ein vielfältiger Umgang mit Aufgaben für das Lernen der Schülerinnen und Schüler?

Wenn es gelingen könnte, die Übernahme von Verantwortung für das eigene Lernen sowie Zielklarheit und eine persönliche Sinn- oder Bedeutungsvorstellung über die jeweiligen Lerninhalte bei den Schülerinnen und Schülern zu stärken, würden viele Lernanforderungen weniger schematisch und mit mehr innerer Beteiligung bearbeitet werden. Damit kann das Arbeiten mit Aufgaben im Unterricht folgende **Funktionen** ausüben:

- Aufgabenbearbeiten als ***Mittel*** (Weg) zur Aneignung von Wissen und Können
- Aufgabenbearbeiten als ***Diagnoseinstrument*** für Verlauf und Ergebnisse im Lernprozess
- Fähigkeiten im Aufgabenbearbeiten (Problemlösen) als Können***ziel.***

Das Finden, Verändern und Vergleichen von Aufgaben durch die Lernenden geht über das Stellen und Lösen üblicher Lehrbuchaufgaben deutlich hinaus ohne automatisch schwieriger zu sein. Es sind etwas andere Anforderungen, die aber die eingangs formulierten Forderungen nach Übernahme von Verantwortung für das eigene Lernen und Nachdenken über das eigene Vorgehen erfüllen können.
Finden, Verändern und Vergleichen von Aufgaben sind Aufforderungen, die auf einer Metaebene liegen. Es sind eigentlich Aufgaben über Aufgaben!
Das Finden von eigenen Aufgabenbeispielen wurde schon in der Aufgabentypisierung im Kapitel 2.1 erfasst. Dieser Aufgabentyp ist besonders gut für Zusammenfassungen und Systematisierungen aber auch für systematische Wiederholungen zu länger zurückliegendem Stoff geeignet.

Eine besondere Bedeutung kommt dem Vergleichen von Aufgaben zu. Es sind tatsächlich Aufgaben gemeint, nicht nur ihre Ergebnisse und Lösungswege! Haben die Lernenden mehrere Aufgaben oder Aufträge hintereinander bearbeitet und die Ergebnisse verglichen oder vorgetragen, werden diese Aufgaben und ihre Lösungen meist ohne weitere Aktivitäten beiseite gelegt. Aber eigentlich beginnt doch hier erst der Erwerb verfügbaren Wissens und Könnens! Werden die Schülerinnen und Schüler nämlich jetzt aufgefordert Gemeinsamkeiten und Unterschiede in den gerade bearbeiteten Aufgaben herauszufinden, müssen die Aufgaben noch einmal von einer anderen Warte aus angesehen werden. Es können dann die Fragestellungen miteinander oder aber die Lösungswege und ggf. auch die Resultate z.B. bzgl. ihrer Existenz und Eindeutigkeit miteinander verglichen werden. Ziel ist es, den Kern der Fragestellungen zu erfassen: Worum ging es in den Aufgaben? Welche Begriffe, Verfahren und welche Lösungsmethoden und Strategien waren hilfreich? (siehe oben)

Eine solche Arbeit mit Aufgaben verlangt für die wichtigen Reflexionsphasen vorausschauendes Arbeiten und eine sensible Anleitung der Lernenden auch im frontalen Unterrichtsgespräch durch die Lehrerinnen und Lehrer. Entsprechende Metaaufgaben zum Vergleichen von Aufgaben können in höheren Klassenstufen aber auch im Rahmen von selbständig zu bearbeitenden Lernprotokollen bzw. in Lerntagebüchern Eingang finden.

Gelingt es, die Schülerinnen und Schüler zum Nachdenken über ihr Vorgehen beim Lösen einer Aufgabe anzuhalten, wachsen die Chancen, dass sie mit Hilfe einer solchen reflektierten Aufgabenbearbeitung tatsächlich etwas Verfügbares dazugelernt haben und nicht einfach nur „beschäftigt“ waren.
Es kommt also nicht nur darauf an möglichst „gute“ Aufgaben zu finden sondern die Art des Umgangs mit den Aufgaben ist letztlich entscheidend für den Lernerfolg. Man kann immer wieder beobachten, dass erfolgreiche Lehrerinnen und Lehrer praktisch aus jeder noch so unscheinbaren Aufgabe „etwas machen können“.
In allen drei Phasen der Bearbeitung einer Aufgabe von der Informationsaufnahme durch die Lernenden und Entstehung der individuellen Lernaufgabe über die Informationsverarbeitung bis zur Ergebnisdarstellung können den Lernenden durch einen spezifischen Umgang mit der Aufgabe wertvolle Orientierungshilfen gegeben werden.

Wann wird eine Aufgabenstellung dem Lernziel entsprechend angenommen?

Im Unterricht kann man gut beobachten, dass viele Lernende sich durchaus erfolgreich die üblicherweise gestellten Aufgaben zu eigen machen, indem sie z.B. nachfragen und sich

bemühen, die Intentionen der Lehrenden zu erfassen. Man kann aber häufig beobachten, dass die individuelle Umwandlung der gestellten Aufgabe in eine individuelle Lernaufgabe teilweise oder völlig misslingt. Statt sich z.B. bewusst mit einer Frage, einem Bewegungsablauf oder einem Text auseinander zu setzen, werden von einigen Lernenden bestimmte Vorgaben nur schematisch abgearbeitet oder sie beschäftigen sich mit ganz anderen Dingen. In diesem Fall stimmen die gestellte und die selbst konstruierte Lernaufgabe nicht überein. Eine gute Übereinstimmung wäre allerdings hilfreich für den individuellen Lernerfolg.
Es gibt keinen Automatismus und es hängt von sehr vielen Faktoren ab, adäquate Lernaufgaben bei den Lernenden zu initiieren. In diesem Zusammenhang seien die empirischen Untersuchungsergebnisse von Jäger/Helmke aus dem Projekt MARKUS[17] erwähnt, die ganz klar gezeigt haben, dass gute Lernleistungen zunächst einmal ein gutes „classroommanagement" voraussetzen. Das wird keinen erfahrenen Praktiker überraschen. Also besteht die erste Aufgabe für die Lehrkräfte darin, dafür zu sorgen, dass lernförderliche Bedingungen herrschen, damit zielgerechte Lernaufgaben (Lernziele) individuell entstehen können. Dazu gehört auch eine ruhige, die Konzentration und angestrengte Auseinandersetzung mit der Aufgabe fördernde Arbeitsatmosphäre in der Phase der Informationsaufnahme. Die schönsten Aufgaben nützen gar nichts, wenn sie nicht „ankommen"- und das gleich in mehrfacher Hinsicht. Ein günstiges Lernklima ist dafür eine notwendige aber nicht hinreichende Voraussetzung.

Halten wir fest:

- Aufgabenvielfalt allein ist noch keine Garantie für erfolgreiches Lernen.

- Aufgabenstellungen, die mehr Spielraum lassen für die Konstruktion individuell passender Lernaufgaben bieten größere Chancen für Lernerfolge.

Darin liegt auch die Begründung, warum sogenannte „offene Aufgaben" in allen Fachdidaktiken seit langem besondere Aufmerksamkeit besitzen. Allerdings ist das Kriterium der „Offenheit" einer Aufgabe wiederum allein nicht ausreichend, um entwicklungsgemäße und entwicklungsfördernde Schülertätigkeiten in Gang zu setzen. Viele offenen Aufgaben unterfordern die Lernenden, wenn es nur darum geht, vielfältige Tätigkeiten auszuführen
ohne definierte Ansprüche und Erwartungen. Zur Konstruktion „guter" Aufgaben vergleiche auch Büchter/Leuders(2005).

Literaturverzeichnis

Biermann, M., Blum, W.(2001): Eine ganz normale Mathe-Stunde? In: mathematik lehren 108/2001, S. 52-54

Biermann, M., Wiegand, B., Blum, W.(2003): Nicht „irgendwie", sondern zielgerichtet Aufgaben verändern. In: Aufgaben. Jahresheft 2003 Friedrich-Verlag, S.32-35

Brauner, U., Leuders, T.(2006): Es ist wahr, denn es steht in der Zeitung....In: Pädagogik Heft 5/Mai 2006, S. 14-19

Bruder, R.(2003): Konstruieren, auswählen – begleiten. Über den Umgang mit Aufgaben. In: Aufgaben. Jahresheft 2003 Friedrich-Verlag, S.12-15

Bruder, R.(2000). Akzentuierte Aufgaben und heuristische Erfahrungen. In:HERGET/FLADE: Berlin.

Büchter, A. & Leuders, T. (2005): Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern - Leistung überprüfen. Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.

Girmes, R.(2003): Die Welt als Aufgabe?! In: Aufgaben. Jahresheft 2003 Friedrich-Verlag, S. 6-11

[17] http://www.lars-balzer.info/projects/projekt_markus.html

Herget, W., Scholz, D.(1989): Die etwas andere Aufgabe. Mathematik-Aufgaben Sek. I aus der Zeitung, Friedrich-Verlag

Lenné, H.(1969): Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland. Stuttgart

Neubrand, J. (2002): Eine Klassifikation mathematischer Aufgaben zur Analyse von Unterrichtssituationen. Selbsttätiges Arbeiten in Schülerarbeitsphasen in den Stunden der TIMSS-Video-Studie. Hildesheim/Berlin: Franzbecker.

Schupp, H. (2003): Thema mit Variationen. Aufgabenvariation im Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker

Winter, H. (1995): Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik Nr.61, S.37-46