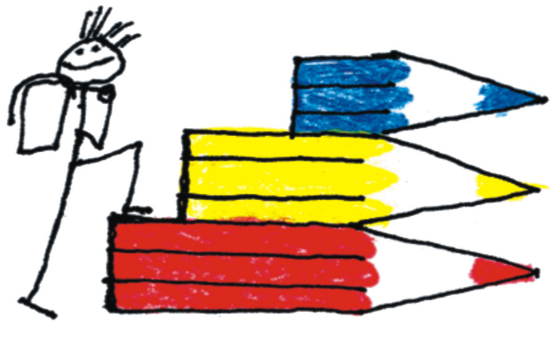
Modulbeschreibungen des Programms SINUS-Transfer Grundschule

Talente entdecken und unterstützen

Friedhelm Käpnick
Marianne Nolte
Gerd Walther

SINUS-Transfer



Grundschule

Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts

G5

Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Impressum

Friedhelm Käpnick, Marianne Nolte, Gerd Walther
Talente entdecken und unterstützen

Publikation des Programms SINUS-Transfer Grundschule
Programmträger: Leibniz-Institut für die
Pädagogik der Naturwissenschaften und
Mathematik (IPN) an der Universität Kiel
Olshausenstraße 62
24098 Kiel
www.sinus-an-grundschulen.de
© IPN, August 2005

Projektleitung: Prof. Dr. Manfred Prenzel
Projektkoordination: Dr. Claudia Fischer
Redaktion u. Realisation dieser Publikation:
Dr. Kirstin Lobemeier
Kontaktadresse: info@sinus-grundschule.de

ISBN: 978-3-89088-184-3

Nutzungsbedingungen

Friedhelm Käpnick, Marianne Nolte, Gerd Walther

Modul 5: Talente entdecken und unterstützen

1 Zwei Fallbeispiele

1.1 Simon

Welche durch 7 teilbare Zahl lässt beim Teilen durch 2, 3, 4, 5 und 6 den Rest 1?
Gibt es mehrere solcher Zahlen?

Diese vom indischen Mathematiker Bhaskara aus dem 6. Jahrhundert stammende Aufgabe stellten wir unseren kleinen Matheassen des 4. Schuljahres[1]. Simon meldete sich nach etwa 10 s und gab freudestrahlend 721 als richtige Lösungszahl an. Verblüfft fragten wir ihn, wie er so schnell die Lösungszahl ermittelte. Hierauf schaute er uns überrascht an. Eine Erklärung wusste er nicht. Er meinte nur unsicher: „Ich kann es nicht erklären. Die Zahl war auf einem Mal dar!“

In einem sensibel geführten Gespräch gelang es uns dann, Simons sprunghafte Gedankengänge zu erkennen, die ihm übrigens nun auch selbst erst bewusst wurden. Simon erahnte nach dem Lesen der Aufgabe blitzschnell einen Zusammenhang mit der Zahl 21, da 21 ein Vielfaches von 7 ist und beim Teilen durch 2, 4, und 5 den Rest 1 lässt. Somit erfüllt 21 bereits einen Teil der geforderten Zahleigenschaften. Dann probierte Simon im Kopf sprunghaft weiter, indem er zu 21 zuerst 70 und dann 700 addierte.

---

[1] An der TU Braunschweig gibt es seit dem Jahr 2000 das Projekt „Mathematische Lernwerkstatt für Kinder“ unter der Leitung von Prof. Dr. F. Käpnick. Im Rahmen dieses Projektes treffen sich mathematisch potentiell begabte Dritt- und Viertklässler aus 15 Braunschweiger Grundschulen im wöchentlichen Wechsel der Jahrgangsgruppen zu 90-minütigen Förderstunden.

Anregung 1: *Lösen Sie die Aufgabe von Bhaskara selbst. (Tipp: Es gibt noch weitere Lösungszahlen.) Vergleichen Sie Ihr Vorgehen mit dem von Simon. Wie gehen Sie im Unterricht mit spontanen sprunghaften Gedankengängen wie im Beispiel von Simon um?*

Mit scheinbar spielerischer Leichtigkeit und seinem ausgeprägten Zahlgefühl vertrauend, löste Simon oft ähnlich anspruchsvolle Problemaufgaben. Der Junge nahm vom Beginn des dritten bis zum Ende des vierten Schuljahres regelmäßig an unseren Förderstunden teil. Sein großes Interesse an der Mathematik und vor allem seine Faszination für Zahlen prägten Simon von Anfang an. Wir konnten aber ebenso beobachten, wie sich im Verlauf der zwei Jahre aus einem zurückhaltenden, eher scheuen Kind ein freundlicher, manchmal auch überschwänglicher, ein hilfsbereiter und selbstbewusster Junge entwickelte.

1.2 Falko

„Bitte lesen! Wichtig!!“

Das notierte Falko zu einer von ihm bearbeiteten Aufgabe. Darüber mussten wir lächeln, denn uns ist es immer wichtig, was die Kinder gedacht und gemacht haben. Unsere Situation in der Arbeit mit mathematisch besonders begabten Kindern im Rahmen unseres Projekts[2] ist privilegiert im Vergleich zur Schule. Wir haben in jeder Gruppe mehrere Personen, die sich um die Kinder kümmern. Wahrscheinlich hatte Falko trotzdem Sorge, dass seine Äußerungen nicht genügend gewürdigt würden. Als er zu uns kam, arbeitete er sehr rasch und fand auch in einer Gruppe von besonders begabten Kindern meistens als Schnellster eine Lösung. Wenn er sie nicht sofort vortragen konnte, wurde er sehr unruhig. Er schlug sich im Plenum dann ununterbrochen auf die Brust und konnte sich nur zurückhalten, wenn die Projektleiterin hinter ihm saß und eine

[2] Das Forschungs- und Förderprojekt „Besondere mathematische Begabung im Grundschulalter“ unter der wissenschaftlichen Leitung von Prof. Dr. M. Nolte ist ein Kooperationsprojekt zwischen der Hamburger Behörde für Bildung und Sport, der Universität und der William-Stern-Gesellschaft. Es ist Teil des Gesamtprojekts der Behörde: „Kinder in der Primarstufe auf verschiedenen Wegen zur Mathematik

Hand auf seine Schulter legte. Alles, was Falko erklärte, war sehr umfassend und beschrieb die entscheidenden Aspekte eines Problems. Wenn ein anderes Kind sich nicht gleichermaßen qualifiziert äußerte, bewertete er dessen Äußerung inhaltlich vollkommen zutreffend.

Anregung 2:

Kennen Sie ähnliche Verhaltensweisen von Kindern aus Ihrem Unterricht?
Wie reagieren Sie in solchen Fällen?

Das Fallbeispiel lässt erkennen, dass Falko in einer normalen Klasse Mitschüler und Lehrkräfte sehr schnell an die Grenzen der Geduld bringen kann.

Übrigens ist Falko nicht arrogant, sondern ein sehr höfliches und verständiges Kind. Wenige Interventionen, wie z.B. „Ist es schlimm, dass Tom fast das Gleiche wie du gesagt hat?“ oder „Ist es schlimm, dass Renata nicht alles richtig erklärt hat?“, führten zu einer Verhaltensänderung in unserer Gruppe und reichten aus, ihn zu einem rücksichtsvolleren Verhalten zu bewegen. Falko engagiert sich nach wie vor sehr stark, aber kann es aushalten, nicht sofort seine Eindrücke äußern zu dürfen.

Glücklich ist Falko, wenn er besonders anspruchsvolle Aufgaben bearbeitet. Dann ist er ruhig und arbeitet sehr lange konzentriert, macht ungern eine Pause. Sich über 60 Minuten mit einem mathematischen Problem zu befassen, belastet ihn nicht, sondern regt ihn an.

Simons Verhalten ist häufiger zu beobachten. Die Fähigkeit Gedanken für andere nachvollziehbar zu formulieren, muss nicht gleichzeitig mit der Einsicht in mathematische Zusammenhänge auftreten. Das wird z.B. auch von Krutetskii (1962) beschrieben. Falkos Verhalten sich auf die Brust zu klopfen um sich zu beruhigen, ist sicher ungewöhnlich. Aber der analytische und kritische Umgang mit den Äußerungen anderer wird z.B. bei Wieczerkowski (1996)[3] als mögliche Verhaltensweise Hochbegabter aufgeführt.

(PriMa)“ und als Weiterführung für den Grundschulbereich des sog. „Hamburger Modells“ der William-Stern-Gesellschaft entstanden.

[3] In diesem Artikel wird als mögliche konfliktträchtige Folge eines hohen Sprachniveaus auf Dominanz im (Unterrichts-)Gespräch verwiesen sowie auf die Konsequenz von anderen als überheblich wahrgenommen zu werden.

Beide Beispiele verweisen auf die Problematik von Kommunikationsstrukturen von hoch begabten Kindern, wie sie auch bei Bauersfeld (1993) angedeutet werden.

Kinder wie Simon oder Falko fordern ein besonderes Engagement von Seiten der Eltern, ebenso wie von Seiten der Schule. Diese Schüler brauchen – wie alle Kinder – unsere Zuwendung und unser Verständnis, sie benötigen Anerkennung und Unterstützung. Die Beispiele widerlegen somit die noch vor wenigen Jahren vorherrschende Auffassung, dass Kinder mit besonderen Begabungen auf natürliche Weise bevorzugt seien und deshalb ihrer Entwicklung keine besondere Aufmerksamkeit geschenkt werden müsste. Für die in der Regel komplexen Probleme der begabten Kinder gibt es aber meist keine einfachen Lösungen. Dennoch können wir die kleinen Matheasse bereits mit vielen relativ einfachen Mitteln wirksam unterstützen.

2 Worin zeigt sich eine besondere mathematische Begabung?

Wir sprechen von einem besonders begabten Kind, wenn es über einen längeren Zeitraum in einem bestimmten Bereich besondere Fähigkeiten zeigt[4].

Entsprechend der Bereichsspezifik beziehen sich diese Leistungen natürlich auf die Mathematik. Hiermit verbunden ist die Frage nach dem „Bild" von der Mathematik als Wissenschaft. Mathematische Tätigkeiten beinhalten eine Vielzahl sehr verschiedener Aktivitäten. Das Aneignen von Faktenwissen gehört ebenso dazu wie das Erkennen mathematischer Zusammenhänge, weiter das Bestimmen von Problemen, das Bearbeiten von Einzelproblemen und von Problemfeldern, das systematische Darstellen von Lösungen, das Strukturieren von Erkenntnissen bis hin zu Theoriebildungen oder das Entwickeln vielfältiger Anwendungsfelder. Welche konkrete Bedeutung mathematische Kompetenzen, wie Fähigkeiten im Erkennen und Lösen von Problemen, Argumentations- oder Kommunikationsfähigkeiten haben, hängt vor allem von den jeweiligen Aufgaben ab.

[4] Die Eigenschaft der Längerfristigkeit ist auch bei der Einstufung von schwachen oder durchschnittlichen Begabungen ein wesentliches Kriterium.

Wir gehen also davon aus, dass sich mathematische Begabung insbesondere im mathematischen Tätigsein erschließt. Dabei stehen produktive, forschende Tätigkeiten im Vordergrund. Ein rezeptives Aneignen von Wissen dagegen ist untergeordnet. Dementsprechend wird ein Kind nicht deshalb als besonders begabt angesehen, wenn es sich rascher als andere Einmaleinsreihen aneignet oder über die schriftlichen Rechenverfahren verfügt – das kann durchaus auch der Fall sein – , sondern wenn es in verschiedenen Tätigkeitsfeldern, insbesondere in Problemlöseprozessen, zu besonderen Leistungen fähig ist.

Übrigens:
Für besondere mathematische Begabungen sind verschiedene Bezeichnungen gebräuchlich: „mathematische Hochbegabung“, „besonderes mathematisches Talent“ u.ä. Die unterschiedlichen Bezeichnungen lassen erkennen, dass es offenbar schwierig ist, diesen Begriff zu fassen. Zugleich verbergen sich hinter den Begriffen verschiedene Theorieansätze, auf die hier jedoch nicht weiter eingegangen werden kann (vgl. dazu z.B. Käpnick 1998). Wir verwenden in diesem Text *besondere mathematische Begabung*, *mathematisches Talent* und *Hochbegabung* synonym.
Im nächsten Abschnitt werden wir an einem Aufgabenbeispiel Aspekte von produktiver, forschender Tätigkeit durch Prozessschritte beschreiben, die mit dem Umgang mit Information zusammenhängen.

In Abschnitt 4 erläutern wir ein Merkmalssystem für besonders begabte Grundschulkinder. Mit erschwerenden Bedingungen für das Erkennen einer mathematischen Hochbegabung beschäftigen wir uns in Abschnitt 5. Der Abschnitt 6 führt weitere Diagnosemöglichkeiten für besondere Begabungen auf und weist auf mögliche Gefahren hin, die mit diesen Diagnosemöglichkeiten verbunden sein können. Der 7. Abschnitt plädiert für das gemeinsame Lernen von begabten und anderen Kindern im Unterricht. Im 8. Abschnitt werden Vorschläge zur Förderung begabter Kinder im alltäglichen Mathematikunterricht gemacht. Der 9. Abschnitt befasst sich mit Befunden aus der IGLU-Studie zu mathematisch besonders leistungsfähigen Kindern.

3 Was kennzeichnet produktives, forschendes mathematisches Tätigsein von Grundschulkindern?

Im Sinne der Kognitionspsychologie können bei der Bearbeitung eines Problems, d.h. einer Aufgabe, zu deren Lösung bei Berücksichtigung des Kenntnisstandes des Aufgabenlösers, kein abrufbares Lösungsverfahren zur Verfügung steht, grob verschiedene Prozessschritte unterschieden werden:

a) die Aufnahme der Information,
b) die Verarbeitung der Information / das Lösen einer Problemaufgabe,
c) die Wiedergabe der gewonnenen Information / die Darstellung des Ergebnisses.

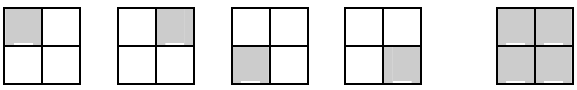
Anhand einer Beispielaufgabe (in Anlehnung an Radatz, Rickmeyer (1996)) sollen Anforderungen der Prozessschritte erläutert werden.

a) die Aufnahme der Information und das Verstehen der Fragestellung

Am Beispiel eines 2x2-Quadrats können sich Kinder mit dem Aufgabeninhalt vertraut machen:

Einstiegsaufgabe: *Wie viele verschiedene Quadrate lassen sich in ein 2x2-Quadrat einzeichnen?*

Die besondere Anforderung liegt hier darin, sowohl 1x1-Quadrate als auch das 2x2-Quadrat als Lösungsmöglichkeit zu erkennen.
Lösung:

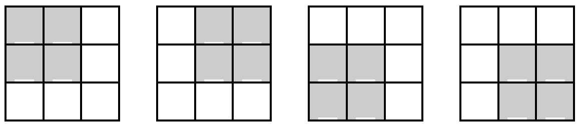


Dass das 2x2-Quadrat quasi über den anderen Quadraten liegt, empfinden einige Kinder als schwierig. Weiterhin ist es nicht einfach, alle Quadrate zu finden. Das Lösungsbeispiel gibt eine gewisse Systematik vor: Zuerst werden alle 1x1-Quadrate in der oberen Zeile, dann alle in der unteren, dann wird das 2x2-Quadrat eingezeichnet.

b) die Verarbeitung der Information / Lösen einer Problemaufgabe

Als Problemaufgabe könnte nun gefragt werden, wie viele verschiedene Quadrate man in einem 3x3-, in einem 4x4-Quadrat usw. zeichnen kann.

Hierzu könnte man mehrere Zeilen mit 3x3-Quadraten sowie eine Tabelle vorgeben, in die die Kinder ihre Ergebnisse eintragen können.



Jetzt müssen die Kinder in den Figuren 1x1-, 2x2- sowie 3x3-Quadrate erkennen. Die in der Einführung gewonnene Information können sie nutzen. Sie müssen diese aber auf eine leicht veränderte Weise verwenden, denn für die 2x2-Quadrate liegt die besondere Schwierigkeit darin, dass diese sich „überlappen“ und somit Felder mehrfach genutzt werden müssen. Die auf einem Arbeitsblatt vorgegebenen Figuren ermöglichen es, jedes gesuchte Quadrat einzuzeichnen.

Während beim Einstiegsproblem auf dem Arbeitsblatt genügend viele 2x2- bzw. 3x3-Quadrate vorgegeben sind, sollte in einem nächsten Schritt bei größeren Quadraten die Produktion von Strukturierungshilfen den Kindern überlassen werden. Letztlich reicht *ein* Quadrat als Basis aus, denn ein systematisches Vorgehen erlaubt es, alle kleineren Quadrate an einer einzigen Figur auszuzählen.

c) die Wiedergabe der gewonnenen Information / die Darstellung des Ergebnisses

In eine Tabelle können die Kinder die entsprechende Anzahl der Quadrate eintragen.

Wie viele sind in einem	Einer-quadrate	Zweier-quadrate	Dreier-quadrate	Vierer-quadrate	...	Hunderter-quadrate	Summe
1x1-Quadrat	1	0	0	0	0	0	1
2x2-Quadrat	4	1	0	0	0	0	5
3x3-Quadrat	9	4	1	0	0	0	14
4x4-Quadrat	16	9	4	1	0	0	30
...							
100x100-Quadrat	10 000	99 • 99	98 • 98	97 • 97	...	1	?

Anregung 3:

In der Tabelle kann man verschiedene Muster erkennen. Welche Zahlmuster erkennen Sie? (Tipp: Analysieren Sie die Zahlfolgen in den Spalten oder in „schrägen“ Linien.)

Einige Kinder erkennen diese Zusammenhänge nur in der Tabelle oder nur in den Figuren. Wird beides aufeinander bezogen, können die Ergebnisse der Tabelle zur Überprüfung der Vermutungen über die Anzahl möglicher Quadrate herangezogen werden.

Die Trennung in die drei Phasen *Informationsaufnahme*, *Informationsverarbeitung* und *Informationswiedergabe* ist idealtypisch gemeint, weil es beim Problemlösen häufig notwendig ist, sich erneut der Aufgabenstellung zuzuwenden, um weitere Informationen zu gewinnen und diese weiter zu verarbeiten. Hilfreich ist eine solche Trennung jedoch unter analytischen Aspekten. So kann man z.B. beobachten, dass auch einige hochbegabte Kinder gelegentlich die Informationen der Aufgabenstellung nur unvollständig erfassen, während andere Kinder Informationen scheinbar „blitzartig“ aufnehmen. Ferner gibt es Kinder, die eine Lösung gefunden haben, sie aber nicht wiedergeben können. Komponententheorien kognitiver Prozesse versuchen durch eine Analyse von Teilprozessen kognitive Komponenten zu erfassen, die bei bestimmten Aufgabenklassen benötigt werden (siehe z.B. Waldmann und Weinert (1990)). Vergleichbar diesem Ansatz führt Kießwetter (1985)[5] Handlungsmuster auf, die sich insbesondere beim Bearbeiten von mathematischen Problemen als günstig erweisen. Am Beispiel der oben beschriebenen Aufgabe soll gezeigt werden, wie solche Analysen unter methodischen Aspekten hilfreich sein können und welche Verhaltensweisen ggf. für eine Lösung förderlich wären.

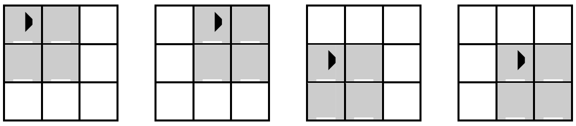
---

[5] Kießwetter benennt Handlungsmuster (bewusst, dass diese Aufzählung keinen Anspruch auf Vollständigkeit haben kann) wie

„1) Organisieren von Material;
2) Sehen von Mustern und Gesetzen;
3) Erkennen von Problemen, Finden von Anschlussproblemen;
4) Wechsel der Repräsentationsebene (vorhandene Muster / Gesetze in ”neuen” Bereichen erkennen und verwenden)
5) Strukturen höheren Komplexitätsgrades erfassen und darin arbeiten;
6) *Prozesse umkehren”* (Kießwetter 1985, S. 302),

die sich als günstig für die Bearbeitung von mathematischen Problemstellungen erwiesen haben.

Es ist notwendig, eine bestimmte *Ordnung* beim Ermitteln der Anzahlen durch ***Organisation des verfügbaren Materials*** herzustellen. Einige Projektkinder zählten *systematisch* und orientierten sich beim 3x3-Quadrat an „Kreuzungspunkten“:



Andere Kinder schoben in ihrer Vorstellung das erste graue Quadrat systematisch über die Felder und erkannten dabei, dass es für ein Zweierquadrat in einem Quadrat der Seitenlänge 3 genau zwei Möglichkeiten gibt, der Seitenlänge 4 genau drei Möglichkeiten es nach rechts zu schieben usw. Damit erkannten sie eine bestimmte ***Struktur***.

Ohne eine solche Systematik kann man leicht die Übersicht verlieren. Hilfen bieten dann entsprechende Vorlagen, in die jedes Quadrat extra eingezeichnet werden kann, aber Kinder, die die Systematik erkannt haben, brauchen solche Vorgaben nicht.

Das Eintragen der Ergebnisse in eine Tabelle ist gleichzeitig ein Wechsel der Darstellungsweise. Beim Einzeichnen der Quadrate überwiegt eine geometrische Sicht auf die Frage, die durch die Notation in der Tabelle einen arithmetischen Bezug erhält. Dieser ***Wechsel in den Repräsentationen*** ist ein wichtiges Mittel, ein Problem unter einer anderen Perspektive zu sehen. Die Befähigung zum Perspektivwechsel ist wichtig, weil ein Wechsel der Darstellung es oft erst ermöglicht, bestimmte Muster zu erkennen. In der Tabelle wird ein solcher Wechsel in der letzten Zeile realisiert. Die Quadratzahlen als Produkt zweier gleicher Faktoren zu betrachten, erleichtert die Lösung für beliebige Zahlen. Der erste Faktor etwa gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, ein kxk-Quadrat in den obersten k Reihen des nxn-Quadrats waagerecht nach rechts zu schieben; das sind n-k+1 Möglichkeiten. Analoges gilt für die vertikale Verschiebung. Somit hat man als Gesamtzahl der kxk-Quadrate in einem nxn-Quadrat die betreffende Quadratzahl in der n-ten Zeile und der k-ten Spalte der Tabelle[6]. Blickt man zudem auf die letzte Spalte, so erkennt man eine rekursive Struktur. Eine Summe unterscheidet sich von der nächsten um eine Quadratzahl. Aus geometrischen Gründen ist dies genau die Anzahl der Einerquadrate, die etwa beim Übergang vom 3x3-Quadrat zum 4x4-Quadrat hinzukommen. Mit dieser rekursiven Strategie kann man sich ausgehend vom 1x1-Quadrat

[6] Hier steht die Zahl $(n-k+1)^2$.

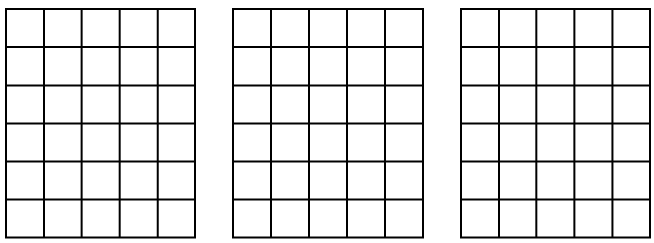
jedes beliebige nxn-Quadrat erschließen und die Gesamtzahl der Teilquadrate in dem nxn-Quadrat berechnen.

Wenn Kinder die grundlegenden Strukturen erkannt haben, ist es ein weiterer Schritt, Vermutungen darüber aufzustellen, wie die Tabelle für größere Seitenlängen von Figuren weitergeführt werden müsste. Das bedeutet noch nicht, dass die Kinder auch die korrekte Anzahl ermitteln können (s. letzte Zeile), denn dazu fehlt ihnen oft noch die Sicherheit in einem größeren Zahlenraum zu rechnen (*Verfügen über Routinen*). Die Verwendung von konkreten Zahlen, um damit einen als allgemein gültig erkannten mathematischen Sachverhalt auszudrücken, verleiht den Zahlen einen Status als Variablen und damit einen algebraischen Charakter: Es ist für Grundschulkinder nicht mehr möglich, ab einer gewissen Zahlengröße etwas auszuprobieren. Sie können aber auf ihre eigene Weise beschreiben, wie etwas „immer geht“ und erfassen damit eine allgemeine Struktur bzw. *verallgemeinern* ihre Beobachtungen.

Die vorgestellte Aufgabe kann leicht variiert werden und damit zu ***Anschlussproblemen*** führen[7]. Eine Variation findet sich bei Radatz, Rickmeyer (1996): Vergleichbare Fragen werden an dreieckige Figuren, in die Dreiecke einbeschrieben sind, gestellt. Es lässt sich jedoch auch die Ausgangsfigur für weitere Fragen nach der Anzahl von Quadraten verändern. Wir haben Kindern z.B. folgende Aufgabe gestellt:

Rechtecke, deren Seitenlängen sich um genau eine Einheit unterscheiden, heißen Heteromeken. Ein solches Rechteck hat z.B. die Seitenlängen 2 und 3 oder 8 und 7.

1. Wie viele Quadrate lassen sich in ein 5x6-Rechteck einzeichnen?



[7] Zunächst halten wir es für wichtig selbst als Lehrkraft Anschlussprobleme zu entwickeln. Für dieses, von Kießwetter (1985) beschriebene Handlungsmuster, verfügen die Kinder in der Regel noch nicht über ausreichende Erfahrungen.

											insgesamt
Anzahl											

Den Kindern werden weitere Rechtecke zum Erkunden vorgegeben. Wenn sie selbst ein kleineres oder ein größeres Rechteck auswählen, kann das als *Erweiterung des Suchraums zur Mustererkennung* beschrieben werden. Zur Verallgemeinerung ihrer Vermutungen werden sie durch folgende Aufgabenstellung aufgefordert:

Kannst du Regeln erkennen, wie du die Anzahl der Quadrate in solchen Rechtecken (Heteromeken) immer feststellen kannst?

Die Entwicklung von einer einfachen Fragestellung zu immer weiteren Fragen lässt eine Aufgabe zu einem *Problemfeld* werden. Auf diese Weise mit Anschlussproblemen konfrontiert können Kinder dazu angeleitet werden, weiter zu fragen. Im Sinne kleiner mathematischer Forscher sind sie nicht „fertig", wenn eine Aufgabe beendet wurde. Sie können lernen, sie als einen Schritt zu weiteren Fragestellungen zu betrachten.

Handlungsmuster, die in dieser Aufgabe zum Tragen kommen[8], sind also

- das Ordnen der vorgegebenen oder der gewonnenen Informationen,
- eine Systematik in der Vorgehensweise, hier: das systematische Zählen,
- der Wechsel in den Repräsentationen,
- das Arbeiten mit weiteren Zahlen (die Erweiterung des Suchraums).

Einige Kinder zeigen diese Handlungsmuster von sich aus, andere erfahren eine Unterstützung durch Fragen wie: Kann man das anders aufschreiben? Wie hast du gezählt? Was bedeutet das, was in der Tabelle steht? Geht das immer so?

Zu den bisher aufgeführten Handlungsmustern können die Kinder im Verlauf eines Bearbeitungsprozesses angeleitet werden, es ist jedoch nicht sicher, dass daraus Mustererkennungsprozesse erwachsen, dass sie in der Lage sind, ihre Erkenntnisse zu verallgemeinern, dass sie Anschlussprobleme finden und eine gewisse Routine entwickeln. Als

[8] Die aufgeführten Handlungsmuster gehen teilweise über die von Kießwetter (1985) genannten hinaus.

weitere kognitive Komponenten des Problemlösens sind deshalb die folgenden Punkte von den bisher genannten Handlungsmustern zu unterscheiden (s. Nolte 2005).

- Mustererkennung,
- das Verallgemeinern der Erkenntnisse bzw. das Übertragen auf andere Zahlen,
- die Entwicklung von Anschlussproblemen,
- das Entwickeln von Routinen.

Die Kinder zum Weiterfragen anzuleiten, dazu ihre Einsichten zu verallgemeinern, ist für die Kinder oft ungewohnt, weil sie meinen, nach *einer* Lösung mit einer Aufgabe fertig zu sein.

In der Regel verfügen die Kinder noch nicht über große Erfahrung in der Problembearbeitung. Das kann dazu führen, dass erkannte Muster und Verfahrensweisen zwar verstanden, aber nicht lange genug durchgehalten werden können. Wie gut ein Kind Probleme bearbeiten kann, hängt deshalb auch von der erworbenen Routine ab.

Welche Handlungsmuster zu beobachten sind, unterscheidet sich abhängig vom vorliegenden Problem. Es ist auch nicht immer möglich solche Handlungsmuster zu beobachten, weil Grundschulkinder uns in ihren Herangehensweisen oft überraschen und auch mit kreativen Problemlösungen erfahrene Erwachsene nicht in der Lage sind, die Wege der Kinder nachzuvollziehen. Dies zeigen nachfolgende Beispiele.

4 Was kennzeichnet Grundschulkinder mit einer besonderen mathematischen Begabung?

Welche Handlungsmuster und Verhaltensweisen können bei mathematisch begabten Grundschulkindern beobachtet werden? U.a. mit solchen Fragen befasste sich Käpnick bei seinen Studien zu Grundschulkindern. Im Rahmen einer mehrjährigen Forschungsarbeit wurde das folgende **Merkmalssystem** für Grundschulkinder mit einer besonderen mathematischen Begabung entwickelt:

Mathematikspezifische Merkmale:

- *Fähigkeit zum Speichern mathematischer Sachverhalte im Kurzzeitgedächtnis unter Nutzung erkannter mathematischer Strukturen,*
- *mathematische Fantasie,*
- *Fähigkeit im Strukturieren mathematischer Sachverhalte,*
- *Fähigkeit im selbstständigen Transfer erkannter Strukturen,*
- *Fähigkeit im selbstständigen Wechseln der Repräsentationsebenen und im selbstständigen Umkehren von Gedankengängen beim Bearbeiten mathematischer Aufgaben,*
- *mathematische Sensibilität.*

Begabungsstützende allgemeine Persönlichkeitseigenschaften:

- *hohe geistige Aktivität,*
- *intellektuelle Neugier,*
- *Anstrengungsbereitschaft,*
- *Freude am Problemlösen,*
- *Konzentrationsfähigkeit,*
- *Beharrlichkeit,*
- *Selbstständigkeit,*
- *Kooperationsfähigkeit.*

Dieses Merkmalssystem (vgl. Käpnick 1998 oder Käpnick 2001) berücksichtigt somit sowohl die Bereichsspezifik mathematischer Begabungen als auch Aspekte der komplexen kindlichen Persönlichkeitsentwicklung. Gerade für diese Altersgruppe reichen kognitive Aspekte beim Problemlösen nicht aus. Wesentlich sind ebenfalls psychische Aspekte. So ist es etwa ohne eine entsprechende Ausdauer fraglich, ob Kinder zu Leistungen in der Lage sind, die ihren kognitiven Möglichkeiten entsprechen.

Exemplarisch soll hier das bereichsspezifische Merkmal „*Fähigkeit zum Speichern mathematischer Sachverhalte im Kurzzeitgedächtnis unter Nutzung erkannter mathemati-*

scher Strukturen“ erläutert werden[9]. Dazu setzte Käpnick u.a. die folgende Indikatoraufgabe bei 110 mathematisch potentiell begabten Dritt- und Viertklässlern und bei 44 Vergleichskindern aus zwei leistungsheterogen zusammengesetzten Schulklassen ein: Den Kindern wurde für kurze Zeit (1 Min.) ein Zahlenfeld gezeigt, das sie anschließend aus dem Gedächtnis reproduzieren sollten.

1	19	18	2
9	11	12	8
7	13	14	6
3	17	16	4

In der statistischen Auswertung zeigte sich ein signifikanter Unterschied zwischen beiden Versuchsgruppen. Während fast 40 % der potentiell begabten Kinder alle 16 Zahlen richtig wiedergeben konnten, gelang dies nur etwa 4 % der Vergleichsschüler. Den entscheidenden Vorteil verschafften sich die potentiell begabten Kinder dadurch, dass sie in der Anordnung Muster erkannten, durch die sie die Anzahl der vorgegebenen Informationen drastisch reduzierten.

Anregung 4:

Welche Muster entdecken Sie im Zahlenfeld?

Setzen Sie die Aufgabe in Ihren Klassen ein und analysieren Sie, wie die Kinder sich die Zahlen einprägen.

Anzumerken ist, dass nach den bisherigen Untersuchungen das Merkmalssystem auch für mathematisch begabte Erst- und Zweitklässler zutrifft. Zugehörige Indikatoraufgaben für Zweitklässler finden Sie in Käpnick und Fuchs (2004).

Hinzufügen muss man weiterhin, dass das obige Merkmalssystem nur eine grobe Kennzeichnung allgemeiner Begabungskriterien sein kann. Mathematisch begabte Kinder weisen oft sehr unterschiedliche Ausprägungen auf. Dies bezieht sich sowohl auf die aufgelisteten begabungsstützenden Persönlichkeitseigenschaften wie auf die bereichsspezifischen Merkmale. Solche Unterschiede werden deutlich, wenn man die Vorgehensweisen der Kinder beim Problemlösen analysiert.

---

[9] Alle Indikatoraufgaben sowie entsprechende Ergebnisinterpretationen finden Sie in Käpnick (1998).

Hierzu ein Beispiel: **Der Würfel-Rechen-Trick**

Bei der Demonstration des Tricks wird ein Kind gebeten, drei Spielwürfel zu einem Turm übereinander zu stellen. Dabei entscheidet es selbst, welche Augenzahl jeweils vorn oder hinten, links oder rechts, unten oder oben bei einem Würfel sind.
Der „Zauberer" behauptet, dass er nur einen Blick auf den Würfelturm zu werfen braucht, um sofort die Gesamtsumme aller sichtbaren Augenzahlen nennen zu können.
Wer durchschaut den Trick? Wie wird hier „gezaubert"?

Bei vielfachen Einsätzen dieser Aufgabe in verschiedenen Gruppen von Zweit-, Dritt- und Viertklässlern (dabei auch in „normalen" Schulklassen) konnten Käpnick und Fuchs immer wieder folgende verschiedene Vorgehensweisen bei Kindern beobachten:

a) <u>Intuitives Erahnen einer Problemlösung bzw. intuitives Herantasten an eine Lösung</u>
   Beispiel:
   Luca (2. Klasse) probierte mit Würfeln nur wenig. Er tippte aber immer wieder auf die obere Augenzahl des obersten Würfels und sagte unsicher: „Damit muss es zusammenhängen."
b) <u>Hartnäckiges Probieren</u>
   Beispiel:
   Franz und Tim (2. Klasse) bauten immer wieder mit Würfeln. Sie versuchten dabei, alle verschiedenen Würfelkonstellationen zu realisieren. Als sie ein Blatt mit Aufgaben voll geschrieben hatten, erkannten sie allmählich, dass es nur bestimmte Ergebnisse gibt. Sie hatten zweifellos intensiv gerechnet und brauchten offenbar diese Phase, um dann strukturelle Einsichten (Die Summe gegenüberliegender Augenzahlen ist bei Spielwürfeln stets 7.) zu erhalten.
c) <u>Abwechselndes Probieren und Überlegen</u>
   Beispiel:
   Jenny und Robert (2. Klasse) bauten zuerst wahllos verschiedene Würfeltürme und schrieben die zugehörigen Additionen der sichtbaren Augenzahlen auf. Dann sahen sie, dass die Summe gegenüberliegender Augenzahlen bei Spielwürfeln stets 7 ist – mehr aber noch nicht. Also probierten sie erst einmal weiter ..., bis dann Robert plötzlich sagte: „*Wenn ich mir den Würfelturm ansehe, dann habe ich vorn und hin-*

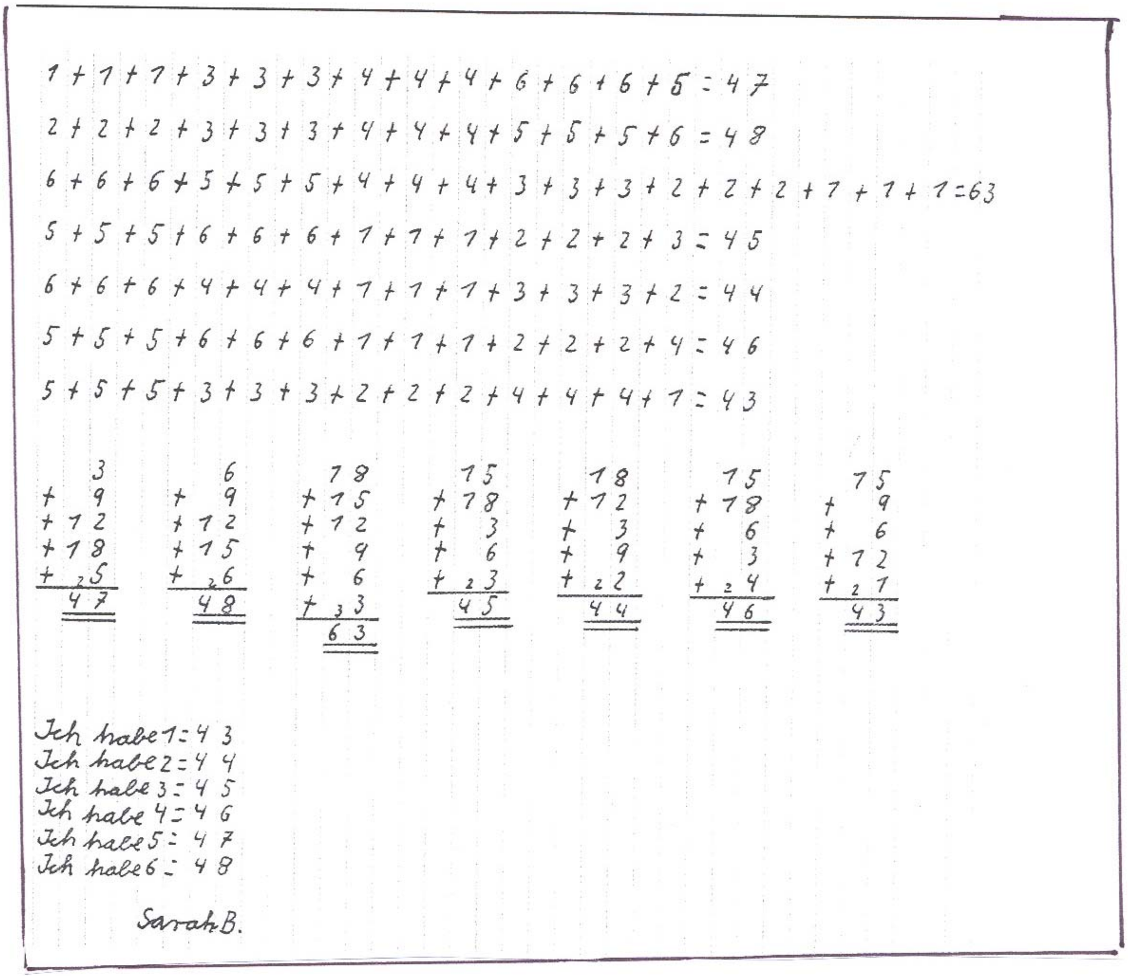
ten 3 · 7 = 21, die beiden Seiten noch dazu sind dann 6 · 7 = 42. Das ist immer so. Ich muss also nur die Zahl oben zur 42 dazurechnen. Das ist alles.“

d) Systematisches Vorgehen

Beispiel:

Sarah (4. Klasse) ging als einziges Kind ihrer Klasse systematisch vor. Dazu baute sie die Würfeltürme so, dass sie an den Seiten die jeweiligen Augenzahlen immer konstant ließ und nur die obere Augenzahl variierte. Systematisch schrieb sie dann alle sich ergebenden Rechenaufgaben auf. So entdeckte Sarah, ähnlich wie Lina und Juliane, dass die Gesamtsumme nur von der oberen Zahl abhängt.

Übrigens auch Birgit und Sandra, zwei eher leistungsschwache Schülerinnen einer anderen 4. Klasse, gingen so vor. Sie waren sichtlich stolz über ihre eigene Entdeckung. Dies sehen wir als einen Beleg dafür an, dass auch leistungsschwache Kinder selbstständig Probleme lösen können, und dass eine solche Erfahrung gerade für die Entwicklung des Selbstbewusstseins sowie der gesamten Lerneinstellung dieser Kinder wichtig ist.

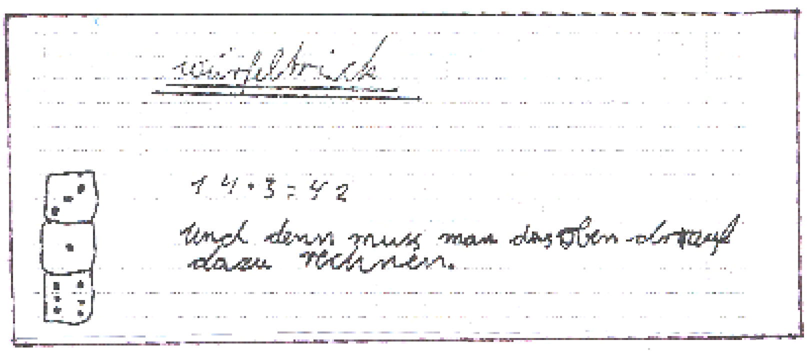

1 + 1 + 1 + 3 + 3 + 3 + 4 + 4 + 4 + 6 + 6 + 6 + 5 = 47
2 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3 + 4 + 4 + 4 + 5 + 5 + 5 + 6 = 48
6 + 6 + 6 + 5 + 5 + 5 + 4 + 4 + 4 + 3 + 3 + 3 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 = 63
5 + 5 + 5 + 6 + 6 + 6 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 3 = 45
6 + 6 + 6 + 4 + 4 + 4 + 1 + 1 + 1 + 3 + 3 + 3 + 2 = 44
5 + 5 + 5 + 6 + 6 + 6 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 4 = 46
5 + 5 + 5 + 3 + 3 + 3 + 2 + 2 + 2 + 4 + 4 + 4 + 1 = 43

Ich habe 1 = 43
Ich habe 2 = 44
Ich habe 3 = 45
Ich habe 4 = 46
Ich habe 5 = 47
Ich habe 6 = 48

Sarah B.

e) <u>Begründen (Herleiten, Erklären, ...) der Problemlösung auf der Basis erkannter Strukturen (Beziehungszusammenhängen)</u>

Beispiel:



Die Mathetalente Thomas und Paul (4. Klasse) erkannten relativ schnell die besonderen Zahlenbeziehungen bei Spielwürfeln und sie lieferten dann auch eine exakte Begründung: „*Da bei gegenüber liegenden Seiten immer 7 raus kommt, ist die Sei-*

tenanzahl der Punkte an jedem Turm 42. Man muss nun nur noch die obere Zahl dazu rechnen. Die Lösungszahlen sind also immer kleiner oder gleich 48.“

Eine weitere, von uns nicht einkalkulierte Lösungsidee, fanden Franziska und Anna (4. Klasse). Die beiden Mädchen, die im Mathematikunterricht ansonsten eher unauffällig sind, erklärten ihre Idee so: „*Wir haben herausgefunden, dass die Gesamtaugenzahl aller drei Würfel immer 63 beträgt. Man muss dann nur die nicht sichtbaren Augen abziehen. Dabei hilft der Trick, dass gegenüberliegende Seiten immer 7 ergeben.*“ Beim Anwenden ihrer mathematisch korrekten Strategie verrechneten sie sich dann aber immer wieder.

Anregung 5:
Setzen Sie den Würfel-Rechen-Trick in Ihrem Unterricht ein und beobachten Sie, wie die Kinder (egal ob hoch oder weniger begabt) den Trick erkunden. Erfragen Sie zugleich, ob die Kinder auch andere Problemaufgaben auf eine ähnliche Weise bearbeiten.

5 Welche generellen Probleme erschweren das Erkennen einer besonderen mathematischen Begabung bei einem Grundschulkind?

Aufgrund der verschiedenen Begabungsausprägungen und solcher äußerst schwer festzustellenden Merkmale wie „mathematische Fantasie“ oder „mathematische Sensibilität“ (vgl. einleitendes Fallbeispiel von Simon) erscheint eine eindeutige Diagnose einer besonderen mathematischen Begabung im Grundschulalter allgemein problematisch. Hinzu kommen einige entwicklungspsychologische Besonderheiten, die insbesondere das Erkennen des mathematischen Begabungspotentials von Erst- und Zweitklässlern sehr erschweren:

- Sechs- bis achtjährige Kinder denken und handeln im Allgemeinen *sehr spontan*. Sie sind meist schnell von einer Sache begeistert, ihr Interesse lässt aber oft ebenso schnell wieder nach. Häufig geben sich Vorschulkinder oder Kinder in den ersten beiden Schuljahren mit oberflächlich erkanntem Neuem zufrieden. Sie wenden sich – offen im Denken und allgemein neugierig – sprunghaft anderen Themen zu, wollen Vieles ausprobieren. *Schnelle und häufige Wechsel von Interessen* sind somit typisch und erlauben meist noch kein eindeutiges Erkennen einer Tätigkeits- oder einer besonderen Begabungspräferenz.

- In dieser Entwicklungsphase unterliegt die kognitive und sprachliche Entwicklung großen Veränderungen. Tendenziell vollzieht sich zwar der Übergang zu einer eigenständigen, von einer konkret-anschaulichen Situation abgehobenen Erkenntnistätigkeit, sodass die Kinder gedankliche Operationen aufbauen können. Die Kinder bleiben dabei aber in der Regel noch längere Zeit beim empirischen Verallgemeinern und erfassen auf dieser Basis einfache Raum-, Zeit- und Kausalbeziehungen. Insgesamt gesehen entwickeln sich die kognitiven Kompetenzen jedoch teils schrittweise, teils sprunghaft und individuell sehr unterschiedlich.

  Kindliche Fantasiewelten und animistische Vorstellungen erschweren uns zusätzlich einen Zugang und eine objektive Wertung ihrer Denkqualitäten. Hinzu kommt, dass die sprachlichen Kompetenzen der Kinder meist noch nicht so weit entwickelt sind, dass sie angemessen über ihr eigenes Tun und über ihre Gedanken verbal reflektieren können. Viele Erkenntnisprozesse laufen zudem im Unterbewusstsein ab, werden von Emotionen und Stimmungen mitbestimmt und entziehen sich somit sogar einer bewussten Reflexion durch die Kinder.

  > *„Kleine Zahlen sind schwach. Sie brauchen die Hilfe von anderen Zahlen. Aber große Zahlen sind stark, die können allein stehen."*
  >
  > Beispiel einer animistischen Vorstellung zu Zahlen bei der achtjährigen Julia
  >
  > (vgl. Käpnick 2004)

  Auch der Wortschatz der Kinder ist oft noch sehr begrenzt. Sie vermischen häufig Alltagsbegriffe diffus mit mathematischen Begriffen oder anderen Fachbegriffen. Dabei haben sie nicht selten ein noch verzerrtes oder teilweise falsches inhaltliches Verständnis von mathematischen Begriffen.

  Außerdem ist zu beachten, dass es Kindern in diesem Alter meist sehr schwer fällt, sich zusammenhängend logisch strukturiert zu einem Problem zu äußern. Mündliche Darstellungen von Lösungswegen oder schriftliche Eigenproduktionen zu mathematischen Problembearbeitungen wirken deshalb häufig chaotisch.

- Der Schulanfang ist ein Zeitraum mit besonders *markanten Veränderungen in den Lebensbedingungen und der Lebensweise* der Kinder. Hierzu gehört, dass die Dominanz der Spieltätigkeit durch die der Lerntätigkeit ersetzt wird, dass die Kinder sich schnell in einer neuen Umgebung, ihrer Schule und ihrer Klasse, zurecht finden müssen, dass sie feste Normen des sozialen Verhaltens kennen lernen und einhalten sollen usw. Gerade für die oft sehr sensiblen (hoch)begabten Kinder ist eine solche Situation nicht unproblematisch. Werden sie von Anfang an im Unterricht unterfordert oder auf ein durchschnittliches Leistungsniveau „zurechtgestutzt“, besteht die Gefahr, dass sich bald Schulunlust oder Frust breitmachen. Ihr besonderes Begabungspotential bleibt somit im „Verborgenen“. Besonders schwierig ist es in den ersten Schulwochen das wahre Leistungspotential von stillen, zurückhaltenden oder schüchternen Kindern zu erkennen, da sie aufgrund ihrer sozialen Konstellation kaum fähig oder noch nicht bereit sind, ihre Leistungskompetenzen „öffentlich“ zu zeigen. In unseren Förderprojekten haben wir auch begabte Kinder kennen gelernt, die sich bewusst (oder unbewusst) dem mittleren Leistungsniveau einer Klasse „anpassten“, also oft im Unterricht wissentlich etwas Falsches sagten, Fragen trotz Könnens nicht beantworteten, um nur nicht aufzufallen oder um nicht als Außenseiter zu gelten (vgl. auch nachfolgende Anmerkungen). Nach unseren Erfahrungen gelingt es dann auch sehr kompetenten Lehrkräften nicht immer, die tatsächliche Begabung eines Kindes zu erkennen. Demgegenüber gibt es ebenso sehr selbstbewusste Kinder, die schon erstaunlich geschickt kommunizieren und ihr beachtliches Können demonstrieren. Jedoch sind selbstbewusstes und geschicktes Auftreten sowie die im Schulunterricht geforderten Zähl- und Rechenkompetenzen alleine noch keinesfalls ein Hinweis auf eine besondere mathematische Begabung.

Problematisch für das Erkennen einer besonderen Begabung bei Erst- oder Zweitklässlern kann deren *„Schieflage“ zwischen verschiedenen Entwicklungsprozessen* sein. Zum Beispiel haben viele hochbegabte Schulanfänger, die schon mehrere Sachbücher gelesen oder einige Knobelbücher „durchgearbeitet“ haben, in den Fächern Deutsch oder Mathematik das Niveau eines Dritt- oder Viertklässlers. Andererseits führen die bevorzugten intellektuellen Tätigkeiten nicht gleichermaßen zu einer entsprechenden Entwicklung der sozialen Kompetenzen. Werden diese Kinder überwiegend an ihrer kognitiven Entwicklung gemessen, was besonders bei Kindern mit hohem Sprachniveau auftreten kann, laufen sie Gefahr, in ihren sozialen Kompetenzen völlig überfordert zu werden. Die Anforderungen, die vor allem intellektuell extrem hochbegabte Kinder erfahren, in ihrem sozialen Umfeld einen angemessenen Platz zu finden, sind nicht zu unterschätzen. Hierbei spielt natürlich eine Rolle, dass hochbegabte Kinder aufgrund ihrer einseitigen Interessenausprägung selten unter Gleichaltrigen adäquate Spiel- oder Kommunikationspartner finden und sie somit schon frühzeitig mehr auf sich selbst angewiesen sind. Wieczerkowski (1996) verweist auf konfliktträchtige Handlungsfolgen von charakteristischen Merkmalen hochbegabter Kinder. Von den verschiedenen Aspekten, die dabei aufgeführt werden, gehört z.B., dass die Schnelligkeit in der Auffassung dazu führen kann, dass ein Kind sich langweilt und stört, dass das tiefe Verständnis für Sachverhalte zu oberflächlichen Beziehungen zu weniger befähigten Kindern führen kann, um nur einige der aufgeführten Aspekte zu benennen (vgl. z.B. Käpnick (2000)).

- Gleichermaßen ist es notwendig, die motorische Entwicklung zu beobachten, die für die Gesamtentwicklung von entscheidender Bedeutung ist. Sind die Interessen der Kinder zu einseitig intellektuell orientiert, werden Schwächen in der motorischen Entwicklung von Eltern zu Unrecht gern liebevoll übersehen („mein kleiner Professor“[10]). Die Diskrepanz zwischen dem Niveau der intellektuellen und dem der körperlich-motorischen Fähigkeiten kann sich z.B. darin zeigen, dass geistig hochbegabte Kinder zwar wie Viertklässler lesen, schreiben oder rechnen, aber andererseits nicht in der Lage sind, mit einer Schere umzugehen, sich selbstständig die Schuhe zuzubinden oder einfache Teilhandlungen bei sportlichen Aktivitäten zu koordinieren. Da die Körperkraft und die psychomotorische Leistungsfähigkeit im Grundschulalter einen sehr bedeutsamen Zuwachs erfahren, sind jedoch sportliche Leistungen oder manuelle Geschicklichkeit oft ausschlaggebend für das Ansehen eines Kindes in seiner Klasse (vgl. Nickel 1981, S. 85). Derartig diskrepante Entwicklungen im kognitiven, sozialen und motorischen Bereich können deshalb auch zu Problemen führen, die evtl. sogar langfristig negative Auswirkungen auf die Entwicklung der Persönlichkeit des Kindes haben.
- Mitunter bereiten Eltern, Geschwister oder Großeltern ein Kind durch intensives Zählen, Rechnen oder Schreiben auf die Schule vor. Diese, sicher in guter Absicht erfolgte Vorbereitung kann einem Kind einen deutlich erkennbaren Lernvorsprung

---

[10] Entsprechende Ungeschicklichkeiten werden nach unseren Erfahrungen eher bei Jungen als bei Mädchen toleriert.

verschaffen. Ein gravierender Lernvorsprung kann aber ebenso auf eine anregende „natürliche Lernatmosphäre“ im Elternhaus zurück zu führen sein. Wenn z.B. einer der Eltern einen mit Mathematik in Verbindung stehenden Beruf ausübt, dann ist die Chance groß, dass ein Kind zwangsläufig Themen aus der Welt der Mathematik aufschnappt, angeregt wird, sich mit ihnen auseinander zu setzen und eine (in unserer Gesellschaft nicht selbstverständliche) hohe Wertschätzung der Mathematik erfährt. Aus solchen förderlichen sozialen Einflüssen darf man andererseits jedoch nicht vorschnell auf eine vorhandene mathematische Begabung schließen. Der Vorhersagezeitraum bis zur Entfaltung des eigenen mathematischen Leistungspotentials im Jugendalter ist noch sehr groß[11] ...

6 Welche Gefahren sind mit verschiedenen Diagnoseinstrumenten verbunden?

6.1 Zu Intelligenztests

Die Ergebnisse von Intelligenztests werden in Gesprächen zwischen Eltern und Lehrkräften häufig als Beleg für eine Hochbegabung gewertet. Im Zusammenhang mit mathematischer Hochbegabung wollen wir dazu einige wichtige Aspekte ansprechen, die es verdeutlichen sollen, wie vorsichtig mit den Ergebnissen von Testungen umgegangen werden muss.

Es gibt in der wissenschaftlichen Diskussion verschiedene Positionen zu besonderen mathematischen Begabungen. Die eine Position beschreibt mathematische Begabung als einen Aspekt einer allgemeinen sehr hohen Intelligenz. Diese Position wird z.B. von Rost (2000) vertreten. „Die vielfältigen Befunde der einschlägigen Literatur lassen keinen Zweifel daran zu, dass mathematische Befähigungen und mathematische Leistungen eng mit der Intelligenz und anderen schulischen – auch sprachlichen –

[11] Käpnick fasst deshalb das theoretische Konstrukt „mathematische Begabung im Grundschulalter“ auch als ein individuell geprägtes bereichsspezifisches Potential für eine mit großer Wahrscheinlichkeit im Jugend- und Erwachsenenalter entfaltete überdurchschnittliche mathematische Leistungsfähigkeit auf.

Schulleistungen verknüpft sind“ (Rost 2000, S. 23)[12]. Aus dieser Position erwächst nicht allein der Einsatz von Intelligenztests zur Identifikation einer solchen Begabung, sondern gleichzeitig auch die These, dass diese mit einer entsprechend hohen Begabung im sprachlichen Bereich verbunden ist.

Im Gegensatz dazu meint House (1999), gestützt auf Berichte in der Literatur, dass mathematisch besonders talentierte Kinder nicht notwendig auch in anderen Bereichen begabt sein müssten, obwohl entsprechende Begabungen nicht selten korreliert auftreten. Dem Konzept Gardners (1994) entsprechend gibt es mehrere von einander unabhängige Fähigkeiten, die intelligentes Verhalten ausmachen. Er unterscheidet in seinen Untersuchungen u.a. mathematisch-logische Fähigkeiten von räumlichen, sprachlichen usw. Winner (1998) beobachtete in ihren Forschungen zu hochbegabten Kindern ebenfalls Spezialbegabungen.

Folgt man der Position von Rost (2000), so lässt sich eine hohe mathematische Begabung mit einem Intelligenztest feststellen. Folgt man unseren Erfahrungen sowie den Positionen von Gardner (1994) und Winner (1998), so kann eine solche Begabung eher durch besondere Leistungen in mathematischen Problemlöseprozessen erfasst werden. Es muss zudem davor gewarnt werden, der Aussagekraft einer Zahl wie einem erhobenen Intelligenzquotienten zu viel zuzuschreiben. Intelligenztests überprüfen sehr unterschiedliche Aspekte intellektueller Leistungsfähigkeiten. Der erhobene IQ ist ein Mittelwert über die Ergebnisse der verschiedenen Untertests. Zudem gibt es sehr viele Intelligenztests mit unterschiedlichen Zielsetzungen. Einige Tests dienen der Überprüfung einer Lernbehinderung, andere einer besonders hohen Begabung. Diese Tests sind dann in den Leistungsbereichen, die nicht in ihrem Fokus liegen, nicht so genau. Bei den im Rahmen des PriMa-Projekts getesteten Kindern (Nolte 2004) wurden zwei verschiedene Tests eingesetzt. Die Ergebnisse des einen Tests sprachen in einem Jahrgang bis zu 2/3 der Kinder eine besondere Begabung zu, die Ergebnisse des anderen etwa 1/3. Viele Intelligenztests überprüfen gleichzeitig Wissen, das kulturelle und gesellschaftliche Aspekte enthält und sie können veralten. So enthielt ein Test eine Frage, was fehlen würde auf einem Bild mit einem Sänger, der ein Mikrofon ohne Kabel in der Hand hielt.

[12] Diese Auffassung geht davon aus, dass es allgemeine Faktoren gibt „general Factor g“, die in intelli-

Früher fehlte das Kabel, heute fehlt es nicht mehr. Zum Ausgleich werden z.B. auch Tests wie der CFT (Culture Free Test) entwickelt, der es erfordert, sehr genau visuelle Informationen zu verarbeiten.[13] Auch das kann problematisch sein, weil er keine Aussage über die Intelligenz der Kinder zulässt, die Probleme in der Aufnahme und Verarbeitung visueller Informationen haben.

Wegen der Fragen, die mit der Ermittlung eines IQ verbunden sind, wird häufig der Prozentrang nach einer Intelligenzmessung mitgeteilt. Mit dem Prozentrang wird ausdrückt, wie viele Personen genauso hohe oder höhere Werte in Intelligenztests erreichen. Grob gesagt wird davon ausgegangen, dass einem IQ von 130 ein Prozentrang (PR) von 98 entspricht. Das bedeutet, dass die Ergebnisse der getesteten Person nur von 2% der Vergleichsgruppe übertroffen werden. Der durchschnittliche IQ wird in der Regel zwischen 90 und 109 angegeben und sagt aus, dass etwa 50% der Personen in diesem Bereich liegen (PR: 25-73). Von einem hohen IQ wird zwischen 110 und 119 gesprochen. Hier liegen etwa 16% der Personen in diesem Bereich (PR: 75-90). Ein sehr hoher IQ liegt zwischen 120 und 129, etwa 7% der Personen liegen in diesem Bereich (PR: 91-97). Ab einem IQ von 130 wird von Hochbegabung gesprochen. Etwa 2% der Personen liegen in diesem Bereich (PR: 98 und höher) (nach Schilling und Rost 1999).

Eine sorgfältig durchgeführte Testung kann für eine kompetente Person eine wichtige Grundlage für eine Beratung zu einem Kind sein. Der IQ allein ist es nicht. Differenzierte Aussagen über Testergebnisse sind mit vielen Fragen verbunden, die sich nicht an einer gemittelten Zahl wie dem IQ oder auch einem Prozentrang ausdrücken lassen. Deshalb wird eine verantwortungsvolle Diagnostik zur Hochbegabung oder mathematischen Hochbegabung immer mit weiteren Verfahren verbunden sein und sollte von entsprechend kompetenten Personen durchgeführt werden.

Insbesondere für Feststellungen einer mathematischen Begabung erscheint uns die Aussagekraft der Intelligenztests begrenzt. Intelligenztests werden „am Ergebnis gemessen“ ausgewertet. Damit bleiben andere und vielleicht fantasievollere Lösungen, als sie sich der Testautor gedacht hat, unberücksichtigt.

---

gentem Verhalten eingesetzt werden. Intelligenztests können diese Faktoren messen.

[13] Auf weitere Aspekte zu dieser Frage kann hier nicht eingegangen werden.

Beispiel aus Käpnick (1998, S. 116)

Fortsetzen der Folge 2, 4, 6, 8

Kind A:	*2, 4, 6, 8*, 1, 3, 7, 9
Kind B:	*2, 4, 6, 8*, 10, 11, 13, 15
Kind C:	*2, 4, 6, 8*, 10, 8, 6, 4, 2

Begründungen

Kind A:	jeweils 2 Zahlen ergeben die Summe 10
Kind B:	bis 10 alle geraden, bis 20 alle ungeraden Zahlen
Kind C:	symmetrischer Aufbau, die Zahlen werden an 10 „gespiegelt“

Alle Lösungen der Kinder sind mathematisch korrekt und kreativ. Sie eröffnen zudem Möglichkeiten für ein freies Spielen mit interessanten Zahlenmustern. Dies alles spielt bei üblichen Intelligenztests jedoch keine Rolle.

Nach den Erfahrungen mit unseren Gruppen von mathematisch hochbegabten Kindern können wir feststellen, dass viele dieser Kinder zugleich eine sehr hohe allgemeine intellektuelle Begabung besitzen. Es gibt aber auch mathematisch talentierte Kinder, die im sprachlichen Bereich nicht zu übersehende Defizite haben oder deren Wert im Intelligenztest durchschnittlich ausfällt[14] (Käpnick 1998; Nolte 2004). Auch deshalb halten wir den Einsatz von Intelligenztests allein für nicht aussagekräftig genug, um Kinder mit einer besonderen mathematischen Begabung zu erfassen.

6.2 Zur Identifikation durch Eltern

Mathematische Begabungen erkennt man dann, wenn Kinder Gelegenheiten erhalten, mathematisch tätig zu sein. Voraussetzung ist es also, Kinder bei solchen Gelegenheiten zu beobachten. Zu Hause erleben viele Eltern, dass sich ihr Kind bereits im Vorschulalter für Zahlen oder geometrische Objekte interessiert. Viele Kinder können bereits sehr

[14] In diesem Zusammenhang sollte bedacht werden, dass hohe sprachliche Fähigkeiten es Lehrerinnen und Lehrern erleichtern, eine hohe Begabung zu erkennen.

früh Zahlen lesen, sie beginnen sehr früh zu rechnen. Ein Kind aus unseren Gruppen konnte mit drei Jahren zweistellige Zahlen lesen, ein anderes hatte mit fünf Jahren den Aufbau unseres Zahlsystems verstanden, kannte Vorgänger und Nachfolger beliebiger Zahlen bis zu einer Million und konnte dreistellige Zahlen im Kopf addieren, wie z. B. 196 + 197. Allerdings zeigen viele Kinder heute bereits ein erheblich größeres Vorwissen zu Schulbeginn, als man noch vor dreißig Jahren vermutete.

Untersuchungen zu Vorkenntnissen von Schulanfängern (Grassmann, Klunter et al. 1995; Hasemann 1998; Hasemann 2001; Schmidt 1982; Selter 1995) zeigen übereinstimmend, dass viele Kinder sich bereits einen Zahlenraum erschlossen haben, der über 10 und 20 hinausgeht. Nicht jedes dieser Kinder ist gleichzeitig mathematisch besonders begabt. Die Anregungen aus unserem Alltag ermöglichen es Kindern sich mathematisches Wissen zu erschließen, das vor 30 Jahren noch allein als Aufgabe der Schule angesehen wurde.

Einige Kinder profitieren auch von älteren Geschwistern. Beim „Schule spielen“ eignen sich auf diese Weise Kinder Inhalte an, die Eltern in Erstaunen setzen. Wir erleben viele Eltern, die sehr genau erkennen, dass bei ihrem Kind eine besondere Begabung vorliegt. Wir erleben es jedoch auch sehr häufig, dass sich Eltern durch die Umgebung, in der das Kind aufwächst, täuschen lassen. Einige Eltern halten es für selbstverständlich, dass ihr Kind vor Schulbeginn lesen und rechnen kann, andere Kinder sehen dies als ein Zeichen von Hochbegabung an. Ein Kind fälschlicherweise für hochbegabt zu halten, kann sich genauso negativ auf seine Entwicklung auswirken wie das Umgekehrte, eine besondere Begabung nicht zu erkennen und nicht zu fördern. Zusammenfassend ist festzustellen: ***Sehr hohe Leistungen können sowohl auf eine hohe Begabung wie auch auf eine sehr gute Förderung des Kindes verweisen.***

Als Identifikationshilfen werden vielfach Kriterien in Tabellen aufgeführt, die sehr vage formuliert sind. Es ist schwer einzuschätzen, was es bedeutet, dass ein Kind besonders großes Interesse an einem Gegenstand zeigt oder dass ein Kind besonders schnell lernt. Manchmal wird aufgeführt, dass ein Kind schlecht schläft und Schwierigkeiten hat, mit Gleichaltrigen. Wenn ein Kind erst einmal in der Schule ist, wird häufig noch das Argument gebraucht, dass sich ein Kind dort langweilt. Das ist sicher bei einigen besonders begabten Kindern der Fall, denn nicht unter allen Bedingungen des Unterrichtsalltags gelingt es den Lehrerinnen und Lehrern besonders begabte Kinder angemessen herauszufordern. Sich im Unterricht zu langweilen, kann aber kein Kriterium sein, Hochbegabung zu vermuten. Dies zeigen Erfahrungen in der Marburger Beratungsstelle „brain“. Von Eltern werden oft auch Indikatoren für eine Hochbegabung benannt, die sich in der Mehrzahl der Fälle nicht als solche erweisen (siehe dazu Graf, Hanses et al. 2002), sondern eher eine Erziehungsberatung erfordern. Wir können nach unseren Erfahrungen davon ausgehen, dass viele Eltern sehr gut in der Lage sind, die Begabung ihrer Kinder einzuschätzen, aber manche erkennen sogar nach beeindruckenden Testergebnissen nicht, dass ihre Kinder ungewöhnliche Leistungen erbracht haben, und sehr viele überschätzen ihre Kinder auch.

6.3 Identifikation durch die Lehrkräfte

Viele Lehrkräfte in der Grundschule unterrichten zwar Mathematik, haben das Fach aber nicht studiert. Damit stellen sich besondere Anforderungen, gerade wenn es um diagnostische Fragen geht. Zu erkennen, ob Lernschwierigkeiten einer besonderen Förderung bedürfen, ist ebenso mit Kenntnissen über mathematische Inhalte und deren Aneignung verbunden wie die Frage, ob bei Kindern besondere mathematische Begabungen vorliegen. Die besondere Begabung eines Kindes lässt sich nur dann beobachten, wenn der Unterricht Angebote enthält, die eine solche Beobachtung zulassen. Wir brauchen deshalb einen Unterricht, der Kinder zum Knobeln anregt, der es erfordert, Probleme zu bearbeiten, der Art, wie sie z.B. von Selter (2004) und Walther (2004) beschrieben werden. Wie dort nachzulesen ist, sind solche Angebote für Kinder unterschiedlichster Begabungsausprägungen sinnvoll, nicht nur für leistungsstärkere.

Aber auch bei guten fachlichen Kompetenzen der Lehrkräfte ist es nicht immer einfach, hochbegabte Kinder zu erkennen. Dafür gibt es verschiedene Gründe:

a) Auch solche Kinder haben bisweilen gute Ideen, können diese aber nur bruchstückhaft ausdrücken. Das kann einerseits daran liegen, dass Denkprozesse von Kindern mit besonderen Begabungen beschleunigt ablaufen und die Sprache dem Denken „hinterher hinkt“. Andererseits verhindern verkürzte Denkabläufe (Krutetskii 1962;

Krutetskii 1976, Bauersfeld 1993) eine sprachlich adäquate Wiedergabe von Lösungswegen[15].

b) Wie andere Kinder auch haben sie wechselnde Tagesformen und wechseln auf Grund einer breit gefächerten Neugier ihre Interessengebiete.

c) Die Vorstellungen von Lehrkräften zum Wesen von mathematischer Begabung basieren nicht selten eher auf mechanistischem (Hochleistungs-)Rechnen als auf produktiver, forschender mathematischer Tätigkeit (vgl. S. 6). Die Chance für Kinder, die im Mathematikunterricht sehr gute Leistungen erbringen, von ihrer Lehrkraft als mathematisches Talent eingestuft zu werden, ist in der Regel größer als für sogenannte underachiever (Hany 1998). Darunter sind Kinder zu verstehen, die zwar hochbegabt sind, aber deren Leistungen im regulären Unterricht das nicht erkennen lassen. Gründe hierfür sind vielfältig:

- Anpassung an das Leistungsmittelfeld der Klasse,
- Soziale Rücksichtnahme gegenüber Mitschülern,
- Wenig herausfordernde Lernumgebungen, etc.

6.4 Ergebnisse von Leistungstests

Die Ergebnisse von Schulleistungstests sind an den Anforderungen der jeweiligen Schuljahre orientiert. Wir können bei den meisten der besonders begabten Kinder erwarten, dass sie solche Tests sehr gut bewältigen. Das kann jedoch nicht als gewährleistet gelten. Wenn Kindern die Aufgaben zu leicht sind, laufen sie Gefahr, sich nicht genug zu konzentrieren und entsprechende Fehler zu machen.

Nach unseren Erfahrungen in verschiedenen Förderprojekten führen zu leichte Aufgaben eher dazu, dass Kinder sich langweilen und es nicht bemerken, wenn Anforderungen gestellt werden, die sie herausfordern könnten.

[15] Siehe dazu das Beispiel zur Einführung „Simon“.

Fazit

Mit diesen kritischen Anmerkungen soll der Blick für die Problematik der Identifikation besonderer mathematischer Begabungen geschärft werden. Insbesondere der Einsatz anspruchsvoller mathematischer Problemstellungen bietet genügend Möglichkeiten zu beobachten, ob sich Aspekte bei Kindern finden lassen, wie sie im Merkmalsystem von Käpnick aufgeführt sind oder zu den Kießwetter'schen Handlungsmustern bzw. den kognitiven Komponenten des Problemlösens gehören. Im Weiteren werden wir auf Fördermöglichkeiten im Unterricht und dabei auch auf das individuelle Arbeiten der Kinder eingehen. Dabei wird erneut der Blick auf den Prozess der Informationsverarbeitung gerichtet, um unter dieser Sicht günstige Handlungsmuster zu benennen. Ebenso werden allgemeine Hinweise auf Steuerungselemente im Unterricht angesprochen.

7 Warum sollten mathematisch begabte Kinder mit anderen gleichaltrigen Kindern gemeinsam lernen?

Aufgrund vieler Fallstudien lassen sich mit Blick auf die gesamte kindliche Persönlichkeitsentwicklung vor allem drei allgemeine Gründe für die Notwendigkeit der Integration begabter Kinder in den normalen Schulunterricht nennen:

1. Begabte Kinder wünschen sich – wie prinzipiell alle Kinder – vielfältige Kontakte zu Gleichaltrigen. Diese Kontakte bereichern nicht nur wechselseitig die Lebenswelten der Kinder. Sie sind für die begabten Schüler auch notwendig, um andersartige Einstellungen, Interessen und Wertvorstellungen kennen und achten zu lernen, und um von dieser Sicht aus das eigene „Ich“ besser verstehen zu können. Fehlen dagegen solche sozialen Kontakte leiden betroffene Kinder meist an sozialer Isolation und bei den begabten Schülern besteht darüber hinaus die große Gefahr, dass die ohnehin schon vorhandene Schieflage zwischen der vorauseilenden intellektuellen Entwicklung und der hinterherhinkenden sozialen Kompetenz sich weiter vergrößert. Hieraus resultieren wiederum nicht selten dramatische Persönlichkeitskrisen der Kinder.

2. Viele Fallstudien zu kleinen Matheassen belegen (wie schon mehrfach angesprochen), dass begabte Kinder nicht – wie immer noch vielfach angenommen wird – problemlos allein ihren Weg gehen. Sie brauchen vielmehr – wie alle Kinder – herausfordernde Lernumgebungen, zugleich Zuwendung und Anerkennung durch andere. Hinsichtlich der Anerkennung hoher mathematischer Fähigkeiten besteht bedauerlicherweise eine generelle „entwicklungspsychologische Problematik“ darin, dass diese Leistungskompetenz unter Grundschulkindern meist keinen großen Stellenwert einnimmt. Für die „Rangordnung“ von Kindern in einer Grundschulklasse sind häufig körperliche Stärke und Geschicklichkeit entscheidend. So haben z.B. für die meisten Jungen sportliche Leistungen, insbesondere im Fußballspiel, den höchsten Stellenwert. Diese „typische Wertorientierung“ unter Grundschulkindern führt der Entwicklungspsychologe Nickel darauf zurück, dass Körperkraft und psychomotorische Leistungsfähigkeit im frühen Schulalter einen sehr bedeutsamen Zuwachs erfahren. Typisch ist für Kinder dieses Alters z.B., dass sie beginnen, erstmals ihre Kräfte und ihre Geschicklichkeit mit anderen zu messen (vgl. Nickel 1981, S. 85). Somit haben Grundschullehrer (und nicht nur sie) die Aufgabe, (allen) Kindern die Wertvorstellung zu vermitteln, dass auch eine hohe mathematische oder allgemein eine hohe intellektuelle Leistungskompetenz etwas sehr Anerkennungswertes ist, und dass Kinder auf solche Kompetenzen durchaus stolz sein können. Die Kinder eines Jahrgangs können solche Wertorientierungen natürlich dann nachhaltig entwickeln, wenn sie in ihren Klassen intellektuell hochwertige Leistungen von Mitschülern selbst konkret erleben.

3. Die Begabung eines Kindes bezieht sich oft nicht auf alle Unterrichtsfächer. Dies trifft auch auf eine Reihe mathematisch begabter Kinder zu. Deshalb wäre es z.B. für solche Kinder vermutlich nicht vorteilhaft, eine Klassenstufe zu überspringen. Sie sollten vielmehr in den Fächern, in denen sie sowieso keine überdurchschnittliche Begabung haben, weiterhin mit den anderen Kindern ihrer Klasse gemeinsam lernen. Damit sie aber stabile soziale Kontakte entwickeln, in einer festen sozialen Gruppe integriert sind und hier Halt finden können, sollten sie u.E. auch am Mathematikunterricht mit den anderen Kindern teilhaben. Das schließt natürlich gleich-

zeitig die Forderung ein, dass diese Kinder dann im Mathematikunterricht angemessen gefördert werden.

Die zuletzt genannte Forderung sehen wir in Übereinstimmung mit einer Konsequenz aus den schlechten Ergebnissen der TIMS- und PISA-Studie, nämlich einer verstärkten Integration begabter Kinder in den täglichen Unterricht. Besonders begabte oder sehr leistungsstarke Kinder können mit ihren Ideen und mit ihrer Kreativität den Unterricht auf vielfältige Weise bereichern und sie können mit ihrer Leistungskompetenz lernstimulierend auf andere Kinder wirken.

8 Wie kann man mathematische Talente im täglichen Mathematikunterricht sinnvoll fördern?

Ein Hauptmittel für eine sinnvolle Integration und Förderung kleiner Matheasse im Schulunterricht sind offene Problemaufgaben, die eine „natürliche Differenzierung“ ermöglichen, d.h. eine Differenzierung, die sich aus dem Inhalt der jeweiligen Problemaufgabe und aus der spezifischen Qualität und der Art, wie ein Kind das Problem bearbeitet, ergibt. Somit sind den begabten Kindern – wie allen anderen Kindern – prinzipiell Freiräume für das Nutzen ihrer Vorkenntnisse, für das Ausprobieren eigener Wege und für das Entwickeln individueller Denk- und Arbeitsstile gegeben. Mitentscheidend für einen erfolgreichen Einsatz offener (Problem-)Aufgaben sind deren gründliche Auswahl und didaktische Aufbereitung.

Für generell wichtig halten wir die folgenden vier Aspekte:

- *Möglichst alle Kinder sollten eine Chance haben, sich mit der Aufgabe erfolgreich auseinander zu setzen (d.h., dass z.B. bei der Präsentation der Aufgabe das Entwicklungsniveau der Kinder bzgl. der Lesefähigkeiten, des Sprachverständnisses, der Selbststeuerungskompetenzen oder der Erfahrungen der Kinder mit Arbeitstechniken berücksichtigt werden. An dieser Stelle sollte es selbstverständlich sein, dass eine Absicherung der notwendigen Kenntnisse zur Problembearbeitung erfolgt.)*
- *Der Aufgabeninhalt sollte für möglichst alle Kinder interessant sein.*

- *Der Aufgabeninhalt soll eine inhaltliche Vielfalt und Offenheit gewährleisten (reichhaltige mathematische „Substanz“).*
- *Es sollte eine Offenheit bzgl. der Wahl von Lösungswegen, von Hilfsmitteln und der Ergebnisdarstellungen bestehen. Günstig sind u.E. Aufgaben, die auf unterschiedlich anspruchsvolle Weise bearbeitet werden können.*

Ein Beispiel hierfür ist die im Punkt 8. vorgestellte „Quadrataufgabe“, die leicht verständlich ist und jedem Kind zumindest für einen Teil der Fragestellungen ein erfolgreiches Lernen ermöglicht.

Weitere Beispiele:

8.1 Die Faltaufgabe[16]

Dieses Unterrichtsbeispiel soll Anlass zu eigener Auseinandersetzung mit einer nicht trivialen Aufgabe sein, die sich dennoch für den Einsatz ab der zweiten Klasse eignet und alle Kinder herausfordert, hochbegabte wie leistungsschwache.

Die Kinder erhalten ein Blatt Papier und eine Schere. Sie sollen das Papier einmal falten und die Ecken abschneiden. Bevor sie dasselbe Blatt auffalten, wird danach gefragt, wie viele Löcher in dem Papier sind. Dieser Vorgang wird mit dem gleichen Blatt mehrmals wiederholt. Um das Vorgehen für die Kinder zu erleichtern, wird die Aufgabenstellung auf fortgesetzte regelmäßig wechselnde Halbierungen (sonst kommt eine andere Zahl raus) eingeengt. Nach mehreren Faltungen ist das Papier so dick, dass weiteres Schneiden zu schwer ist. An dieser Stelle wird zu Vermutungen angeregt, wie viele Löcher es bei weiteren Faltungen geben müsste.

<u>Lösungsansätze von Kindern (Beispiele):</u>

- Jedes Loch bekommt einen rechten und linken Nachbarn (weitere Löcher werden durch Zeichnen ermittelt).

[16] vgl. Nolte und Kießwetter (1996)

- Wenn man das gefaltete Papier wieder aufklappt, wird die Folge der Anzahl von Löchern ebenfalls ersichtlich. Ein Einschnitt an der Faltkante wird im nächsten Schritt zum Loch. Auch hier kann durch Zeichnen das neue Muster dargestellt werden.

<u>Zur Ermittlung der Anzahl von Löchern anhand einer Formel:</u>

$A(a,b) = (2^a-1)(2^b-1)$ (wobei a und b die Anzahl der Faltungen angibt)

Die Bearbeitung dieser Aufgabe macht es notwendig, Hypothesen zu entwickeln, die zunächst unmittelbar überprüft werden können. Viele Kinder werden Lösungsansätze entdecken, die unvollständig oder nicht verallgemeinerbar sind. Es ist wichtig, dies als Schritte in einem Prozess zu betrachten, in dem Kinder Ermutigung erfahren sollten.

<u>Zum Weiterdenken:</u>

- Was passiert, wenn man immer nur in eine Richtung faltet?
- Auf welche Weise sollte da geschnitten werden?
- Wonach könnte noch gefragt werden?
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen den entstandenen Mustern und der Anzahl der Löcher? ...

8.2 Zauberer Logofix gewinnt immer[17]

Gegeben ist ein Intervall [1; 10] und eine Zielzahl (100). Es werden zwei Parteien gebildet, die abwechselnd eine Zahl aus dem Intervall addieren. Gewonnen hat derjenige, der als erster die Zielzahl erreicht. Es gibt Siegerzahlen, von denen aus sicher gewonnen werden kann. Da der Zauberer diese kennt, gewinnt er immer!

Dieses Beispiel lässt sich durch Variation des Zahlbereichs auf unterschiedlichem Niveau bearbeiten. Bei der Vorgabe des Intervalls [1; 3] und der Zielzahl 20 wird in wenigen Schritten erkennbar, dass 16 eine Siegerzahl ist, die man erreichen sollte. (Weitere Siegerzahlen: 12, 8, 4, 0). Die Ermittlung der Siegerzahlen erfolgt z.B. durch fortgesetzte Subtraktion der Summe der kleinsten und größten Zahl des Intervalls. Die Startzahl

[17] Dieses Beispiel wird von Käpnick in seinen Förderprojekten eingesetzt.

ist ebenfalls wichtig: Gehört 0 zu den Siegerzahlen, muss der „Zauberer“ beginnen, gehört sie nicht dazu, beginnt der Gegner.

Fragen an die Kinder:

- Wie gewinnt Zauberer Logofix?
- Wie lauten die Siegerzahlen?
- Wann ist es günstig zu beginnen?
- Was passiert, wenn ich das Intervall verändere? Was passiert, wenn ich 1 zur Siegerzahl addiere? ...

Anregung:

Welche Verwandschaft besteht zum „NIM-Spiel?“

8.3 Die Nuss-Aufgabe

Ein Vater legte 36 Nüsse in einer Quadratanordnung auf den Tisch und sagte zu seinem Sohn: „Kannst du sechs Nüsse so wegnehmen, dass in jeder waagerechten und senkrechten Reihe eine gerade Anzahl Nüsse liegen bleibt?

o o o o o o
o o o o o o
o o o o o o
o o o o o o
o o o o o o
o o o o o o

Die Aufgabe ist leicht verständlich, sie hat einen spielerischen Reiz und wirkt deshalb sehr motivierend auf Kinder. So arbeitete auch ein geistig behindertes Mädchen an dieser Aufgabe ausdauernd und kam zu eigenen Entdeckungen.

Anregung:

Lösen Sie die Nuss-Aufgabe. Reflektieren Sie dann über Ihre Entdeckungen und analysieren Sie die mathematische „Substanz“ der Aufgabe.

8.4 Zu Unterschieden in den Herangehensweisen der Kinder

8.4.1 Am Beispiel der Faltaufgabe: Die Vollständigkeit der Informationsverarbeitung

In diesem Abschnitt soll die Bedeutung von kognitiven Komponenten des Problemlösens bzw. der Handlungsmuster exemplarisch erläutert werden.

Beim Einsatz der Faltaufgabe in Regelklassen konnten wir beobachten, dass sich Kinder hinsichtlich der Vollständigkeit der Informationen, die sie beachten, unterschieden. Kinder, die nicht alle relevanten Zahlen oder Flächen mit in den Problemlöseprozess einzubeziehen konnten, erkannten auch nicht die richtige Anzahl von Löchern bzw. das Muster, das nach einer neuen Faltung entsteht. Aus solchen Beobachtungen schlussfolgern wir, dass es für das Problemlösen von entscheidender Bedeutung ist, die Kinder zum bewussten Steuern der Informationsaufnahme zu befähigen. Diesen Prozess unterstützen wir durch Fragen wie: „Willst du dir noch mal durchlesen, was hier (in der Aufgabenstellung) steht?“ oder „Hast du schon alles beachtet, was du gesehen hast?“. In der Regel ergeben sich in der Bearbeitung eines Problems weitere Informationen, die geordnet werden können. Das Sortieren der Informationen darf hier aber nicht mit der Ordnung auf einem Papier verwechselt werden. Das Kind muss eine (individuell) effektive Ordnung entwickeln, denn eine solche Strukturierung erleichtert bzw. ermöglicht ihm das Erkennen von Strukturen oder das Bilden einer anderen/neuen Ordnung.

Wir erhoffen uns z.B. von dem Einsatz von Tabellen, dass die Kinder dies als sehr vorteilhaft für das Sortieren von Materialien erkennen. Nach unseren Erfahrungen ordnen einige Kinder die Materialien von sich aus. Andere Kinder erkennen die Nützlichkeit des geschickten Organisierens beim eigenen Probieren oder in gemeinsamen Auswertungsdiskussionen. Außerdem gibt es Kinder, die selbst für das geordnete Abheften von Arbeitsblättern Unterstützung brauchen. Diesbezüglich wurde von Kognitionspsychologen beobachtet, dass gute Problemlöser sich länger Zeit für den Prozess der Informationsaufnahme nehmen als weniger erfolgreiche (Waldmann, 1996). Dies bestätigt unsere Position hinsichtlich der Bedeutung der Informationsaufnahme, die in einem Problemlöseprozess immer wieder neu als wichtiger Arbeitsschritt auftauchen kann.

8.4.2 Am Beispiel Zauberer Logofix: Die Vielfalt möglicher Erkenntnisse

An dieser Aufgabe können Kinder sehr viel entdecken. So ist es möglich, eine, mehrere oder alle „Siegerzahlen“ zu finden. Sie können ebenso die Bedeutung der Startzahlen erkennen wie die des vorgegebenen Intervalls. Diese Einsichten können auf eine konkrete Aufgabenstellung oder auf ein beliebiges Intervall mit einer beliebigen Zielzahl verallgemeinert werden. In das Problemfeld werden die Kinder unterschiedlich weit eindringen. Um die Motivation am Aufgabeninhalt für alle Kinder aufrecht zu erhalten, ist daher ein sorgfältiger und überlegter Umgang mit den verschiedenen Ergebnissen der Kinder wichtig. Da in der Regel fast jedes Kind die erste Siegerzahl ermitteln kann, ist es möglich, dass sich auch alle Kinder an der Diskussion der Ergebnisse beteiligen können. Auch (gut gemeinte) Hilfen für ein tieferes Eindringen in die Aufgabe müssen gut überlegt werden und jeweils die Individualität des Kindes berücksichtigen. Für ein leistungsstarkes Kind kann es beispielsweise eine wichtige Erfahrung sein, einmal nicht sofort ein Ergebnis zu finden und sich mit dieser Situation selbst auseinanderzusetzen. Ein Impuls, wie z.B. „Was passiert denn, wenn ich diese Zahl (die erste Siegerzahl) als Zielzahl nehme?“, kann für Kinder eine sehr starke Lenkung sein, die ihnen viele Möglichkeiten zum eigenen Entdecken wegnimmt. Für andere Kinder könnte dagegen diese Hilfe notwendig sein, um sie überhaupt erst einmal an Problemlösen heranzuführen.

8.4.3 Zum Umgang mit den Ergebnissen aller Kinder

Eingangs zwei Beispiele:

- Ein geistig behindertes Mädchen aus einer Integrationsklasse hat die Nussaufgabe nicht vollständig gelöst, aber sie hat eifrig nach Lösungsansätzen gesucht und war in der Lage, ihre Entdeckungen anderen Kindern mitzuteilen.
- Beim Bearbeiten der Faltaufgabe entdeckte ein Kind, dass sich in bestimmten Phasen des Faltprozesses Aufgaben zum „Einmaldrei“ ablesen lassen. Dies ist eine Idee, die nicht unmittelbar weiter trägt, weil sie nur für bestimmte Faltungen Gültigkeit hat.

Die Beispiele verdeutlichen, dass jedes Kind im Mathematikunterricht bis zu einem bestimmten Grad bestimmte Muster und Strukturen erkennen, Vermutungen äußern, diese überprüfen und zumindest Teillösungen zu einer Problemaufgabe finden kann.

Nicht jedes Kind wird natürlich – wie die Beispiele ebenfalls zeigen – jede Problemaufgabe lösen, ggf. mehrere verschiedene oder alle Lösungen einer Aufgabe ermitteln oder auch eine Lösung oder einen Lösungsweg vollständig verstehen. Es ist uns aber besonders wichtig darauf hinzuweisen, dass beim Problembearbeiten ***die mathematisch-produktive Tätigkeit*** im Vordergrund steht, dass also nicht allein das Ziel, sondern ebenso der Prozess des Erforschens bedeutsam ist und dass alle Kinder diesbezüglich gefördert werden müssen. Das schließt ein, dass Kinder beim Problembearbeiten auch Umwege oder Irrwege gehen (dürfen). Hinsichtlich von Kindern mit Leistungsschwächen ist zusätzlich zu beachten, dass sich diese oft eine eher rezeptive Haltung angewöhnen. Sie warten darauf lernen zu können, ***wie etwas geht*** und wenden dieses rezeptive Wissen auch gern an, weil es Erfolg verspricht. Damit geht aber die Fähigkeit verloren, sich selbst aktiv mit einem Thema auseinanderzusetzen.

Unter methodischer Sicht ist deshalb eine wohl überlegte Aufgabenauswahl genauso relevant wie ein sensibler Umgang mit vielfältigen Lösungsideen der Kinder. Wichtig sind weiterhin gründliche Überlegungen zur Zeitdauer der Problembearbeitung, zur Bereitstellung von Lernmitteln, zur konkreten Zielvorgabe, … Die Motivation der Kinder kann z.B. völlig überfordert sein, wenn sie für Aufgaben, die viele anspruchsvolle Erweiterungen zulassen, alle möglichen Lösungsaspekte untersuchen sollen. Hinzu kommt schließlich: Was Kinder an einer Aufgaben alles entdecken, unterscheidet sich von Stunde zu Stunde und von Klasse zu Klasse.

8.4.4 Methodische Hinweise

Neben dem Einsatz offener Problemaufgaben schlagen wir vor, in regelmäßigen Abständen Aufgaben mit „Knobelcharakter“ in den Unterricht einzubinden. Zahlreiche Beispiele hierfür finden Sie in der Literaturliste des Anhangs.

Neben einer gründlichen Auswahl von Aufgaben sind einige weitere Bedingungen, die u.a. von Heller (1996) und Fielker (1997) als fördernde Bedingungen für die Arbeit mit besonders begabten Kindern bezeichnet werden, zu beachten.

- Eine positive Einstellung der Lehrkräfte zu den Kindern; besondere Begabungen können Unsicherheit bei den Lehrkräften auslösen. Ein hochbegabtes Kind fordert immer eine zusätzliche Aufmerksamkeit, die im Unterrichtsalltag als störend empfunden werden kann.

- Echtes Interesse der Lehrkräfte an den Ideen der Kinder; Lehrkräfte sollten stets versuchen, diese in ihrer Authentizität zu verstehen und nicht anstreben, in den Äußerungen der Kinder ihre eigenen Ideen wieder zu erkennen: Dies setzt voraus, dass die Lehrkräfte auch ungewöhnlichen Ideen von Kindern souverän begegnen können. Das ist aus verschiedenen Gründen sehr anspruchsvoll – u.a. auch, weil andersartige Ideen von allen Beteiligten oft als Störungen empfunden werden.
- Die generelle Möglichkeit für alle Kinder, Ideen zu entwickeln, zu überprüfen und in der Gruppe auszudiskutieren; dies geht vor allem auf Vorstellungen von Lernprozessen zurück, die von konstruktivistischen Ideen (vgl. z.B. Lorenz 1997) geprägt sind und die Interaktionen und Kommunikation einen hohen Stellenwert einräumen.
- Ein flexibler Umgang mit den Beteiligten am Mathematikunterricht.

Fielker (1997) warnt demgegenüber vor einem Unterricht, in dem z.B.

- zu früh über Ideen der Kinder geurteilt wird; denn nicht jede Vermutung führt zu einer angemessenen Lösung, aber manchmal enthalten Hypothesen Ansatzpunkte, die in einem späteren Schritt zur Lösung führen oder die Ausgangspunkte für interessante Anschlussprobleme sind.
- Ideen ignoriert oder vernachlässigt werden, von denen die Lehrkraft annimmt, dass sie nicht richtig seien; denn die Arbeit mit unseren Kindern zeigt, dass auch bei langjährig erprobten Aufgaben zu beobachten ist, dass Kinder immer wieder neue Lösungsideen entwickeln. Nicht immer ist es trivial einen neuen Ansatz unmittelbar auf Richtigkeit zu durchschauen.
- Ideen ignoriert oder vernachlässigt werden, von denen die Lehrkraft annimmt, dass sie für den Rest der Klasse zu anspruchsvoll seien (vgl. Fielker 1997, S. 25).

Diese Ansätze zur Förderung besonderer Begabungen eignen sich für die Förderung aller Kinder. Von Vertretern des entdeckenden Lernens wird seit langem gefordert, durch Differenzierung und offene Angebote Kinder mit unterschiedlichsten Begabungsausprägungen herauszufordern (vgl. z.B. Winter 1984). Im Sinne von Enrichment-Angeboten[18] kommt es dabei nicht in erster Linie auf die Erarbeitung neuer Inhalte an, sondern auf eine „Bereicherung der Begriffe (neue Aufgabenklassen, neue mathematische Gebiete), auf den Ausbau ihrer möglichen Verknüpfungen (in Anwendungen und Analogien, besonders auch aus anderen Wissenschaftsdisziplinen) und auf die Vermehrung der sie stützenden sprachlichen, grafischen, bildlichen etc. Vorstellungen (Bauersfeld 1993, S. 262). Auf diese Weise zu unterrichten, erfordert eine Balance zwischen Hinweisen, die Kinder vor zu großer Offenheit schützen und Einengungen, die die eigene Denktätigkeit einschränken.

Der Umgang mit offenen Aufgaben ist aus verschiedenen Gründen im Unterricht nicht leicht zu realisieren. Eine wesentliche Voraussetzung ist eine Vertrautheit der Lehrkräfte mit der jeweiligen Aufgabenstellung. Darüber hinaus müssen gerade Grundschulkinder noch Routinen mit Problemstellungen entwickeln. Eine typische Herangehensweise von Kindern dieses Alters ist das Probieren. Hier kann es wichtig sein, Erfahrungen mit einer gewissen Systematik beim Probieren zu erwerben. Die Fülle des beim Probieren gewonnenen Materials muss geordnet werden. Auf die Möglichkeit, Tabellen dazu zu verwenden, wurde bereits hingewiesen. Aber auch der Wechsel der Repräsentationen, z.B. zwischen dem gewonnenen Material und den Tabellen, ist nicht für jedes Kind selbstverständlich. Im Gespräch mit anderen Kindern können diese Heuristiken aufgezeigt und miteinander verglichen werden. Rückwärts gerichtetes Arbeiten[19] ist ebenfalls ein günstiges Handlungsmuster, das einige Kinder von sich aus anwenden, andere als Möglichkeit kennen lernen müssen.

Für Kinder dieses Alters ist es wichtig, Mut zu haben ihre eigenen Wege zu beschreiten. Dies ist nicht für alle Kinder selbstverständlich. Einige entdecken interessante Muster und Vorgehensweisen, beschreiten aber zunächst sichere oder gewohnte Wege (wie z.B.

---

[18] Darunter sind Angebote zu verstehen, mit denen die altersüblichen Inhalte angereichert und damit zu einer Herausforderung für Kinder mit besonderen Begabungen werden. Im Unterschied dazu stehen Akzelerationsangebote, die Kinder früher mit Inhalten vertraut machen, die für spätere Schuljahre vorgesehen sind.

[19] Darunter ist zu verstehen, dass Kinder vom Ergebnis einer Fragestellung ausgehend versuchen das Problem zu lösen. Man kann z.B. eine Summe von 20 aus mehreren Summanden dadurch finden, dass man probiert, welche Summanden 20 ergeben. Man kann aber auch 20 zerlegen in z.B. 10 + 10 und dann eine 10 weiter zerlegen (10 + 4 + 6).

Zählprozesse). Das kann bei Lehrerinnen und Lehrern den Eindruck erwecken, sie würden nur über einfache Techniken verfügen (s. dazu Pamperien 2004).

Statt einer Zusammenfassung abschließend zwei Aussagen von Kindern aus unseren Förderprojekten zum Nachdenken:
Peter (ein aus dem Ausland stammendes Kind, das erst in unserem Projekt Freunde in Deutschland fand):
„Die Förderstunden haben mir immer viel Spaß gemacht. Ich war oft glücklich. Das waren Stunden positiver Emotionen!“

Tim (ein Kind, das erst allmählich im Projekt „auftaute“):
„Ich habe vorher gedacht, dass Mathe immer nur Rechnen ist. Nun weiß ich, dass Mathe ein endloses Spiel sein kann. Es macht Spaß, auch wenn man sich oft ganz schön anstrengen muss.“

9 Befunde aus der IGLU-Studie zu mathematisch besonders leistungsfähigen Kindern[20]

In Mathematik besonders leistungsfähige Grundschulkinder begegnen Lehrkräften im Unterricht stets als Individuen mit den ihnen eigenen Besonderheiten. Simon und Falko aus Abschnitt 1 sind hierfür Beispiele. Im Folgenden werden verallgemeinerte Ergebnisse zu mathematisch leistungsstarken Kindern vorgestellt. Grundlage hierfür sind Befunde aus der IGLU-Studie (Bos et al. 2003) zu Viertklässlern vor.

Allerdings muss dabei beachtet werden, dass vor dem Hintergrund der IGLU-Studie das Schülermerkmal „besonders leistungsfähig“ anders definiert wird als in den Abschnitten 2 bis 4 dieses Textes[21]. Das hängt damit zusammen, dass bei IGLU nicht die Gruppe der mathematisch besonders talentierten Kinder im Mittelpunkt stand, sondern allgemein

[20] Frau K. Lobemeier aus dem IGLU-Team sei herzlich für die Datenauswertung gedankt. Eine detaillierte Analyse zur Thematik dieses Abschnitts wird vom Mathematikteam von IGLU an anderer Stelle publiziert.

die mathematischen Kompetenzen von Viertklässlern in Mathematik überprüft werden sollte. Darüber hinaus ist auf die Problematik zu verweisen, die daraus entstehen kann, wenn „leistungsstark“ mit „hochbegabt“ oder „besonders begabt“ gleichgesetzt wird (siehe dazu die Untersuchung von Rost (2000)).

Dennoch lassen sich auch bei einem solchen, in den Anforderungen breit angelegten Test Aussagen über mathematisch besonders leistungsfähige Kinder gewinnen. Eine Möglichkeit besteht darin, „formal“ die leistungsstärksten oberen 5 Prozent[22] der Schülerinnen und Schüler[23] als Gruppe der *mathematisch besonders Leistungsfähigen* zu deklarieren[24]. Diese formale Festsetzung besagt zunächst nur, dass die 5 Prozent der in Mathematik leistungsstärksten Viertklässler betrachtet werden. Was diese Schülerinnen und Schüler in ihrem mathematischen Wissen und Können von den anderen unterscheidet, ist damit noch nicht festgelegt. Einen Eindruck von der relativen Leistungsstärke unserer Spitzengruppe liefert der internationale Vergleich mit den leistungsstärksten oberen 5 Prozent der Schülerinnen und Schüler anderer Staaten. Ein Blick auf den im IGLU-Bericht durchgeführten internationalen Vergleich der Mathematikleistungen (Walther et al. 2003, S. 209) zeigt, dass unsere deutsche Spitzengruppe im oberen internationalen Mittelfeld liegt, während ein deutlicher Abstand zu den Spitzengruppen etwa in Tschechien und Japan besteht.

---

[21] Zur Problematik, die aus der Gleichsetzung von „leistungsstark“ mit „hochbegabt“ oder „besonders begabt“ entstehen kann verweisen wir auf die Untersuchung von Rost (2000).

[22] Bzw. einen anderen kleinen Prozentsatz.

[23] Um auch die internationale Vergleichbarkeit dieser Gruppe zu ermöglichen, wurden die Testergebnisse dieser Kinder aus ihren Leistungen beim Lösen einer bestimmten Teilmenge aller IGLU-Testaufgaben gewonnen.

[24] Die andere, stärker inhaltlich, an Kompetenzen orientierte Möglichkeit mathematisch besonders leistungsfähige Kinder zu kennzeichnen wird hier nicht weiter verfolgt. Entsprechend ihrer mathematischen Testleistungen in der IGLU-Studie wurden die Schülerinnen und Schüler einer von fünf hierarchisch geordneten Kompetenzstufen zugeordnet. Bei dieser Betrachtungsweise liegt es nahe, die Kinder der obersten Kompetenzstufe (V) bzw. die zur „Spitze“ in dieser Kompetenzstufe gehörenden Kinder als die Gruppe der mathematisch besonders Leistungsfähigen zu definieren. Allerdings erlaubt es das Testdesign von IGLU nicht, die so definierte Gruppe mit der von uns oben gewählten Gruppe in Beziehung zu setzen. Unsere formale Betrachtungsweise ist jedoch insoweit stimmig, als alle mathematisch besonders leistungsfähigen Kinder der obersten Kompetenzstufe angehören.

9.1 Soziale Herkunft der Kinder

Die internationalen Vergleichsuntersuchungen PISA 2000 und PISA 2003 haben einen beunruhigend engen Zusammenhang zwischen sozialer Herkunft von Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe I und deren Bildungsbeteiligung erbracht. Schwippert et al. (2003) haben im Rahmen der IGLU-Studie auch für Viertklässler einen Zusammenhang zwischen der mathematischen Kompetenz der Kinder und ihrer sozialen Herkunft festgestellt. Kinder aus Elternhäusern[25] mit höherem Sozialstatus schneiden im mathematischen Kompetenztest bei IGLU vergleichsweise besser ab als Kinder aus anderen Elternhäusern. Im Folgenden sollen nun einige Aspekte der sozialen Herkunft speziell für die Gruppe der mathematisch besonders leistungsfähigen Viertklässler im Vergleich zur Gesamtgruppe der Viertklässler beleuchtet werden.

Die IGLU-Studie hat gezeigt, dass bei Kindern ohne Migrationshintergrund, bei denen also kein Elternteil im Ausland geboren wurde, der Anteil von Leistungsstarken deutlich größer ist als in der Gruppe der Viertklässler. Fast alle leistungsstarken Kinder sind in Deutschland geboren und haben, als sie noch klein waren, Deutsch sprechen gelernt. Auch zu Hause wird – mit anderen Kindern oder Erwachsenen – überwiegend Deutsch gesprochen. Erfahrungen bei der regionalen Arbeit mit mathematisch begabten Kindern zeigen, dass auch Kinder mit Migrationshintergrund sehr erfolgreich in diesen Gruppen mitwirken.

Der Vergleich der sozialen Herkunft, abgebildet durch Bildungsstatus, Sozialstatus und Ökonomischem Status der Eltern, von allen IGLU-Kindern mit dem der mathematisch besonders leistungsfähigen Kinder zeigt auffällige Unterschiede.

- *Vergleichsweise hoher Bildungsstatus*: Während etwa ein Viertel der Väter von IGLU-Kindern als (höchsten) Bildungsabschluss aus dem Tertiärbereich einen Fachhochschul- oder Universitätsabschluss bzw. den Abschluss an einer Berufsakademie haben, ist dieser Anteil bei Vätern von leistungsstarken Kindern gut doppelt so groß. Bei den Müttern ergibt sich bei Bildungsabschlüssen aus dem Tertiärbereich etwa die gleiche Relation, obwohl hier nur jede dritte Mutter von

---

[25] Dies bestätigt die Position, dass für die Entfaltung einer Begabung sowohl entsprechende genetische Voraussetzungen als auch ein förderliches soziales Umfeld notwendig sind.

besonders leistungsfähigen Kindern über einen Bildungsabschluss aus diesem Bereich verfügt.

- *Vergleichsweise hoher Sozialstatus*: Ein analoges Bild zeigt auch der Blick auf den Sozialstatus der Eltern, repräsentiert durch die derzeit von den Eltern der Viertklässler ausgeübten Berufe. Jeder zweite Vater eines mathematisch besonders leistungsfähigen Kindes übt einen Beruf aus, der zu den drei Spitzengruppen von Berufen gehört (z.B. Techniker, Leitender Bediensteter, Unternehmensleiter). Bei den Viertklässlern insgesamt halbiert sich dieser Anteil. Bei den Berufen der Mütter ergibt sich das gleiche Verhältnis, wobei allerdings der Anteil in den drei Spitzengruppen von Berufen vergleichsweise deutlich kleiner ist.
- *Vergleichsweise hoher ökonomischer Status*: Auch beim ökonomischen Status, gemessen durch das Haushaltseinkommen, das heißt dem Einkommen aller verdienenden Haushaltsmitglieder, liegen die Familien der leistungsstarken Kinder deutlich vor den meisten Familien der IGLU – Kinder. Fast zwei Drittel dieser Familien verfügen über ein Haushaltseinkommen von mindestens 40 Tsd. EUR. Der Anteil der Familien von Kindern, die nicht zur Gruppe der Leistungsstarken gehören, mit solch einem Mindesteinkommen ist deutlich kleiner.

9.2 Schwierige Problemaufgaben aus IGLU

In diesem Abschnitt bringen wir zwei Aufgabenbeispiele[26] aus dem IGLU-Test, die in der Gruppe der besonders Leistungsfähigen im Vergleich zu allen IGLU-Kindern sehr gut gelöst werden. Die „Plusaufgabe“ ist eine rein innermathematische Aufgabe, die Aufgabe „Züge“, eine komplexe Sachrechenaufgabe. Sie wurde nicht zuletzt deshalb in diesen Text aufgenommen, weil dieser Aufgabentyp in der Diskussion um mathematisch besonders leistungsfähige Kinder ungerechtfertigt bisher nur eine untergeordnete Rolle spielt.

[26] Nur ein kleiner Anteil aller Viertklässler hat diese Aufgaben gelöst. Auf einer Schwierigkeitsskala für Aufgaben haben diese Aufgaben hohe Schwierigkeitswerte.

Die „Plusaufgabe“[27] und die Aufgabe „Züge“ gehören zu den schwierigsten Aufgaben bei IGLU. Nur etwa jedes zehnte Kind konnte die „Plusaufgabe“ und jedes dritte Kind die Aufgabe „Züge“ lösen. In der Gruppe der mathematisch besonders Leistungsfähigen steigt die Lösungshäufigkeit für diese Aufgaben deutlich an: etwa jedes zweite Kind löst die „Plusaufgabe“, und drei Viertel der Kinder lösen die Aufgabe „Züge“.

Bei der Plusaufgabe handelt es sich in der Sprechweise der Denkpsychologie um ein Problem[28] (Dörner 1987). Die Schüler können nämlich im vorliegenden Fall nicht auf ein abrufbares Verfahren zurückgreifen, um vom Gegebenen, den sechs Ziffern, zum Gesuchten, den daraus nach bestimmten Regeln zu bildenden dreistelligen Summanden mit minimaler bzw. maximaler Summe zu gelangen. Stattdessen müssen sie überlegen, welches Wissen sie abrufen müssen, hier insbesondere sind es Fragen zum Stellenwertbegriff. Das Bilden von größten und kleinsten Zahlen aus drei Ziffern gehört zu den Standardaufgaben bei der Erweiterung des Zahlenraums. Allerdings genügt es beispielsweise bei der Bestimmung der minimalen Summe nicht, als einen der Summanden die aus dem Ziffernrepertoire zulässig gebildete kleinste dreistellige Zahl und als weiteren Summanden die kleinste dreistellige Zahl aus den übrigen Ziffern zu bilden. Vielmehr muss bei der Konstruktion der Summanden gemäß der Konstruktionsregel der dreistelligen Zahlen aus den gegebenen Ziffern das System der Beziehungen zwischen der Ziffernverteilung auf die Positionen in den beiden Summanden, den Summanden und der geforderten minimalen Summe beachtet werden. Die Vielschichtigkeit der zur Lösung der Plusaufgabe nötigen Denkvorgänge und die Berücksichtigung von Nebenbedingungen weisen darauf hin, dass diese Aufgabe an die Schüler Anforderungen von hoher kognitiver Komplexität stellt.

---

[27] Zu einer detaillierten Analyse vgl. G. Walther, K. Lobemeier: Analysen zur schwersten Aufgabe aus IGLU-E. Erscheint in Kaune, Ch., Schwank, I. & Sjuts, J. (Hrsg.). Mathematikdidaktik im Wissenschaftsgefüge: Zum Verstehen und Unterrichten mathematischen Denkens: Festschrift für Elmar Cohors-Fresenborg: Osnabrück 2005.

[28] Genauer gesagt um ein Problem mit einer sog. Synthesebarriere.

Die Plusaufgabe

Du hast die sechs Zahlen zur Verfügung:

1 2 3 4 5 6

Bilde damit zwei dreistellige Zahlen (zum Beispiel 253 und 614) und addiere sie.

Wichtig: Benutze bei jeder Plusaufgabe jede Zahl nur einmal!

Beispiele:

$$\begin{array}{r} 253 \\ +\,614 \\ \hline 867 \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{r} 436 \\ +\,125 \\ \hline 561 \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{r} 541 \\ +\,362 \\ \hline 903 \end{array}$$

a) Schreibe rechts in den Kasten eine Plusaufgabe mit dem **kleinsten** Ergebnis, das möglich ist.

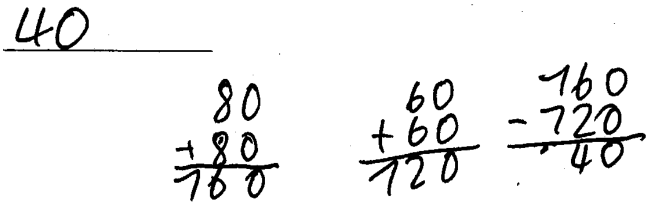
b) Schreibe rechts in den Kasten eine Plusaufgabe mit dem **größten** Ergebnis, das möglich ist. Links daneben kannst du ausprobieren und rechnen.

Züge

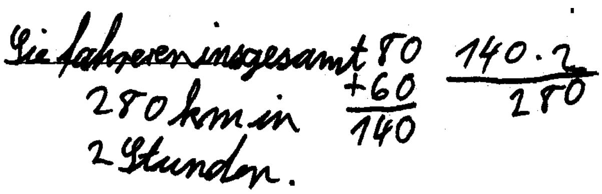
Auf einem Bahnhof fahren zur gleichen Zeit zwei Züge ab. Sie fahren in **entgegengesetzte** Richtungen. Der eine fährt pro Stunde 80 km, der andere fährt pro Stunde 60 km. Wie viele Kilometer sind die beiden Züge nach 2 Stunden Fahrzeit voneinander entfernt?

Auch bei dieser Aufgabe gehören die notwendigen mathematischen Operationen im Zahlenraum unter 500 zum Standardwissen der Klassenstufe. Deshalb ist zu vermuten, dass rein arithmetische Rechnungen, also losgelöst vom Sachkontext, wie $2 \cdot 60 + 2 \cdot 80$, oder $2 \cdot 140$, die aber die Antwort auf die in der Aufgabe gestellte Frage liefern würden, von deutlich mehr Kindern bewältigt worden wären, als die Entwicklung dieser mathematischen Modelle zur Lösung der Sachrechenaufgabe. Worin besteht die Anforderung an Kinder, diese Aufgabe zu bewältigen?

Zunächst muss der im Text dargestellte Sachzusammenhang, ein Bewegungsvorgang, erkannt werden, bei dem aus gegebenen Fahrstrecken pro Stunde auf eine Entfernung nach zwei Fahrstunden geschlossen werden soll. Dies erfordert eine geometrische Anschauung der Situation, insbesondere unter Beachtung des im Aufgabentext hervorgehobenen Hinweises auf eine Bewegung in entgegengesetzte Richtung. Gerade leistungsschwächere Kinder tendieren dazu – vielleicht verleitet durch das „Bewegungsmodell“ für die Subtraktion am Zahlenstrahl – die beiden korrekt berechneten Teilergebnisse zu subtrahieren (vgl. auch die zweite Lösung).



Bei der Mathematisierung der Situation ist eine Strukturierung vorzunehmen. Die Entfernung der beiden Züge nach zwei Stunden kann nicht in einem einzigen Schritt, durch Verknüpfung zweier gegebener Größen gewonnen werden, sondern muss aus mindestens zwei Teilschritten berechnet werden, die dann durchaus wieder in einem Lösungsterm oder aus den Teilergebnissen zweier Lösungsterme synthetisiert werden könnten (z.B.: 2·60 = 120, 2·80 = 160, 120 + 160 = 280, oder vgl. Schülerlösung).



Wie viele der Kinder diese Lösungsschritte ermitteln können, d.h. wie anspruchsvoll diese Aufgabe unter mathematischen Gesichtspunkten ist, lässt sich wegen der oben beschriebenen Voraussetzungen im Verständnis der Situation aus den gewonnen Daten nicht ablesen. Es ist jedoch festzuhalten, dass in diesem Mathematisierungsschritt die Fähigkeit, Strukturen höheren Komplexitätsgrades zu erfassen und darin zu arbeiten (vgl. Kießwetter 1985) zum Tragen kommt sowie die Fähigkeit zum Speichern mathematischer Sachverhalte unter Nutzung erkannter Sachstrukturen. Bei der folgenden, wohl durch Kopfrechnen gefunden Zwischenlösung wurde dann offenbar „vergessen“, die Fahrzeit von 2 Stunden zu berücksichtigen.

Antwort: 140 KM

Dies macht deutlich, dass die Analyse von Anforderungen in Aufgaben nach Handlungsmustern oder kognitiven Komponenten des Problemlösens auf verschiedenen Leistungsniveaus möglich ist. In den Anfangs aufgeführten Projekten befassen wir uns deshalb auch mit der Frage, wie komplex Aufgaben sein dürfen bzw. müssen, damit sie hochbegabte Kinder herausfordern. Es zeigt ebenfalls, dass eine Aussage zu den Fähigkeiten mathematisch besonders begabter Kinder immer unter Berücksichtigung des verwendeten Aufgabenmaterials sowie der dabei verwendeten methodischen Maßnahmen vorzunehmen ist. In Folge der didaktischen Diskussionen der letzten Jahre wurde gezeigt, dass entdeckendes Lernen und sich Bewegen in komplexeren Fragestellungen für Kinder aller Begabungsausprägungen wichtig ist (siehe dazu z.B. Scherer (1995)). Aber erst die Aufgaben zeigen uns, was in einem bestimmten Kontext als komplex anzusehen ist und was nicht.

9.3 Soziale Integration in der Schule

Der größte Teil der leistungsstarken Kinder fühlt sich in der Schule integriert. Gut drei Viertel der Kinder verneinen, sich als Außenseiter zu fühlen, nur etwa eines von sechs Kindern äußert sich dazu schwach zustimmend (stimmt ein wenig). Der Anteil der Kinder, die in der Schule einen Ort sehen, zu dem sie sich zugehörig fühlen, ist mit 90 Prozent noch größer. Zum Wohlfühlen an der Schule tragen sicherlich die sozialen Beziehungen der leistungsstarken Kinder zu anderen Kindern bei. Nahezu alle Kinder geben an, in der Schule leicht Freunde zu finden (stimmt genau bzw. fast). Zwei von drei Kindern schätzen ihre eigene Beliebtheit in der Schule hoch ein (stimmt genau bzw. fast).

9.4 Kognitive Anforderung im Mathematikunterricht

Für knapp ein Viertel der leistungsstarken Schülerinnen und Schüler ist die Schule ein Ort, an dem sie sich oft langweilen (stimmt genau bzw. fast). Zu den Herausforderungen des Mathematikunterrichts meinen die Kinder Folgendes: fast alle Kinder verneinen strikt, dass der Unterricht so schwer sei, dass sie nicht mitkommen. Nur wenige Kinder halten die von der Lehrkraft gestellten Aufgaben für „ganz schön schwierig“ (stimmt genau bzw. fast). Auch die Hausaufgaben bieten offenbar keine wirklichen Herausforderungen für leistungsstarke Schüler. Gut zwei Drittel der Kinder halten die Hausaufgaben für so leicht, dass sie nicht wirklich nachdenken müssen. Nahezu alle Kinder können die Hausaufgaben in der Regel lösen. Anders als die selbstständige Bearbeitung von Arbeitsblättern und anderen Aufgabenvorlagen gehört das Erfinden eigener Aufgaben im Unterricht nach Wahrnehmung der Kinder wohl noch nicht zur etablierten Unterrichtspraxis. Nur etwa jedes vierte Kind meint, dass diese Methode in „seinem“ Mathematikunterricht oft bzw. sehr oft praktiziert werden würde.

9.5 Beteiligung am Mathematikunterricht und begabungsstützende Persönlichkeitsmerkmale

Fast alle leistungsstarken Kinder arbeiten meist intensiv im Mathematikunterricht mit, melden sich häufig und lassen sich nur selten von abschweifenden Gedanken oder anderen, nicht zum Unterricht gehörenden Tätigkeiten ablenken. Diese Befunde lassen sich auch als Indizien für ausgeprägte Konzentrationsfähigkeit und hohe geistige Aktivität und somit als Hinweise auf begabungsstützende allgemeine Persönlichkeitsmerkmale interpretieren (vgl. S. 9).

9.6 Didaktische und methodische Elemente des Mathematikunterrichts in der Wahrnehmung der Kinder

Gut die Hälfte der Schülerinnen und Schüler findet, dass die Lehrkraft den Unterricht „richtig spannend“ gestaltet (stimmt genau bzw. fast). Etwa vier von fünf der Kinder halten den Unterricht für abwechslungsreich. Für etwa die Hälfte der Kinder stellt die Lehrkraft Verbindungen zwischen dem Unterrichtsstoff und dem täglichen Leben her.

Der Aspekt der Unterforderung, der bereits in den Äußerungen der Kinder zu den wohl nur geringen intellektuellen Herausforderungen durch die (Haus-)Aufgaben zum Aus-druck kam, wird mit den von den Kindern wahrgenommenen pädagogischen Zielsetzungen ihrer Lehrkräfte noch unterstrichen.

Der überwiegende Teil der Schüler meint, dass sich die Lehrkraft bemüht, dass alle Schülerinnen und Schüler im Unterricht mitkommen. Deshalb nimmt sich in der Wahrnehmung der Kinder die Lehrkraft auch Zeit, um Dinge, die einzelne Kinder nicht verstanden haben, so oft zu erklären, bis sie alle Kinder verstanden haben. Insgesamt entsteht so bei gut drei von vier der leistungsstarken Schülerinnen und Schülern der Eindruck, dass die Lehrkraft den Unterricht so ausrichtet, dass vor allem die Schwächeren viel lernen (stimmt genau bzw. fast). In dieses Bild passt dann auch, dass die Aussage, die Lehrkraft mache den Unterricht nur für die besseren Schülerinnen und Schüler mit etwa 5 Prozent nur eine äußerst geringe Zustimmung findet.

9.7 Zukunftsvorstellungen der Eltern zum Bildungsverlauf ihrer Kinder

Die IGLU-Studie wurde am Ende der vierten Klasse durchgeführt. Zu diesem Zeitpunkt war bereits bekannt, welche Schulart die Kinder im neuen Schuljahr besuchen sollten. Der größte Teil der leistungsstarken Schüler tritt in das Gymnasium oder einen gymnasialen Zweig über. Etwa jedes zehnte Kind geht zur Realschule; der Anteil zukünftiger Hauptschüler ist verschwindend klein.

Als schulischen Bildungsabschluss stellen sich die meisten Eltern für ihr Kind das Abitur vor. Nur etwa jedes siebte Kind soll den Mittleren Bildungsabschluss machen.

Nach den Vorstellungen der Eltern soll nach dem Schulabschluss der weitere Bildungsgang der meisten Kinder vorzugsweise in ein Hochschulstudium, und mit deutlich geringerem Anteil in ein Fachhochschulstudium münden.

9.8 Fazit

Die Befunde aus der IGLU-Studie zur sozialen Herkunft der mathematisch besonders leistungsstarken Viertklässler haben gezeigt, dass der größte Teil dieser Kinder aus einem gehobenen sozialen Familienmilieu mit entsprechenden kulturellen, sozialen und ökonomischen Ressourcen kommt. Erfreulicherweise sind auch einige Kinder aus einem für die Bildungsbeteiligung ungünstigen sozialen Hintergrund unter den Leistungsstarken zu finden. Dies zeigt, dass auch bei einzelnen Kindern aus einem ungünstigen sozialen Umfeld ein Potential vorhanden ist, das sie zu besonderen mathematischen Leistungen befähigt. Dieser Befund wirft einige Fragen auf. Hat sich die mathematische Leistungsstärke dieser Kinder bereits im Unterricht gezeigt oder blieb sie verborgen bzw. unerkannt? Gibt es noch weitere Kinder aus ungünstigem sozialem Umfeld mit verborgenem mathematischem Potential? Und schließlich: wie können solche Kinder dazu gebracht werden, ihr mathematisches Potential zu entfalten?

Eine wesentliche Bedingung scheint uns in diesem Zusammenhang die Diagnosefähigkeit von Lehrkräften zu sein. Es ist wichtig, dass Lehrkräfte auch im Verborgenen schlummernde Talente von Kindern erkennen. Das gilt selbstverständlich nicht nur für Kinder mit ungünstigem sozialem Hintergrund. Zur diagnostischen Kompetenz von Lehrkräften muss die konstruktive Kompetenz einer differenzierten Unterrichtsgestaltung mit einem herausfordernden Lern- und Aufgabenangebot (auch in den Hausaufgaben) treten. Ein solches Angebot würde einerseits mathematisch leistungsstarke Kinder mit dem von ihnen gewünschten mathematischen Denkfutter versorgen und könnte andererseits „verdeckte Talente“ herausfordern und aufspüren helfen.

10 Literatur

Bauersfeld, H. (1993). “Mathematische Lehr-Lern-Prozesse bei Hochbegabten - Bemerkungen zu Theorie, Erfahrungen und möglicher Förderung.” Journal für Mathematikdidaktik 14(Heft 3/4), S. 243-266.

Bardy, P. & Hrzán, J. (2005). Aufgaben für kleine Mathematiker mit ausführlichen Lösungen und didaktischen Hinweisen. Köln, Aulis Verlag.

Bos, W., Lankes, E.-M., Prenzel, M., Schwippert, K., Walther, G., Valtin, R. (Hrsg.) (2003). Erste Ergebnisse aus IGLU, Schülerleistungen am Ende der vierten Jahrgangsstufe im internationalen Vergleich. Münster, Waxmann Verlag.

Dörner, D. (1987). Problemlösen als Informationsverarbeitung. Stuttgart, Kohlhammer.

Fielker, D. (1997). Extending Mathematical Ability Through Whole Class Teaching. London, Hodder & Stoughton.

Gardner, H. (1994). Abschied vom IQ. Die Rahmentheorie der vielfachen Intelligenz. Stuttgart, Klett Cotta.

Graf, S., Hanses, P., et al. (2002). Die Begabungsdiagnostische Beratungsstelle Brain - Konzeption und Evaluation -. Besondere Begabungen - eine Herausforderung für Lehrerinnen und Lehrer. Grundlagen - Konzepte - Beispiele. H. L. f. Pädagogik. Wiesbaden. Schule + Beratung Nummer 10, S. 87-100.

Graichen, J. (1995). „Das Nadelöhr des Wissenserwerbs.” Folie im Vortrag.

Grassmann, M., Klunter, M., et al. (1995). „Was können Schulanfänger bereits vor ihrer ersten Mathematikstunde.” Grundschulunterricht 42, S. 23-24.

Greenes, C.; Mode, M. (1999). Empowering Teachers to Discover, Challenge, and Support Students with Mathematical Promise. Developing mathematical promising students. L. J. Sheffield. Virginia, Reston.

Hany, E. A. (1998). Gifted children in the classroom: Which diagnostic skills do teachers need? European Council for High Ability, Oxford UK.

Hasemann, K. (1998). “Die frühe mathematische Kompetenz von Kindergartenkindern und Schulanfängern - Ergebnisse einer empirischen Untersuchung.” Beiträge zum Mathematikunterricht 1998, Vorträge auf der Tagung für Didaktik der Mathematik in München.

Hasemann, K. (2001). “"Zähl' doch mal!". Die nummerische Kompetenz von Schulanfängern.” Sache - Wort - Zahl 29/35, S. 53-58.

Heller, K. A. (1996). „Begabtenförderung - (k)ein Thema in der Grundschule?” Grundschule 5, S. 12-14.

House, P. A. (1999). Promises, Promises, Promises. Developing mathematically promising students. L. J. Sheffield. Reston, Virginia, The National Council of Teachers of Mathematics, S. 1-7.

Käpnick, F. (1998). Mathematisch begabte Kinder. Frankfurt a.M., Peter Lang.

Käpnick, F. (2000). Nöte mathematisch begabter Grundschulkinder. - In: Pädagogik, die Kinder stark macht (Hrsg. von U. Geiling). - Opladen: Verlag Leske u. Budrich, S. 137-148.

Käpnick, F. (2001). Mathe für kleine Asse (Handbuch für die Förderung mathematisch interessierter und begabter Dritt- und Viertklässler). – Berlin: Volk und Wissen.

Käpnick, F. & Fuchs, M. (Hrsg.) (2004). Mathe für kleine Asse (Handbuch für die Förderung mathematisch interessierter und begabter Erst- und Zweitklässler). – Berlin: Volk und Wissen & Cornelsen.

Käpnick, F. (2004). Die Förderung hoch begabter Kinder – eine Herausforderung an unsere Grundschule – In: Grundschulunterricht 49/8, S. 2-7.

Käpnick, F. & Fuchs, M. (2002). Take five! – Parkettieren eines Hunderterfeldes mit Quadratfünflingen. – In: Lernchancen 28, S. 12-15.

Käpnick, F. (2002). Mathematisch begabte Kinder fördern. – In: Grundschule 34/11, S. 12-14

Käpnick, F. (2004). „Aber große Zahlen sind stark ... " – Subjektive Zahlauffassungen von Kindern. In: Sache, Wort, Zahl 4.

Kießwetter, K. (1985). „Die Förderung von mathematisch besonders begabten und interessierten Schülern – ein bislang vernachlässigtes sonderpädagogisches Problem." Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht 38. Jg., Heft 5, S. 300-306.

Krutetskii, V. A. (1962). An Experimental Analysis of Pupils Mathematical Abilities. Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics. J. Kilpatrick and I. Wirszup, Standford University, University of Chicago.

Krutetskii, V. A. (1976). An Investigation of Mathematical Abilities in Schoolchildren. Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics. J. Kilpatrick and I. Wirzup. Chicago, Stanford University University of Chicago. II.

Lorenz, J. H. (1997). Kinder entdecken die Mathematik. Braunschweig.

Nickel, H. (1981). Entwicklungspsychologie des Kindes- und Jugendalters. 3. Auflage. Bern, Stuttgart, Wien: Huber.

Nolte, M., Ed. (2004). Der Mathe-Treff für Mathe-Fans. Fragen zur Talentsuche im Rahmen eines Forschungs- und Förderprojekts zu besonderen mathematischen Begabungen im Grundschulalter. Hildesheim, Franzbecker.

Nolte, M. (2005). Waben, Sechsecke und Palindrome. Zur Erprobung eines Problemfelds in unterschiedlichen Aufgabenformaten. Im Druck.

Nolte, M., Kießwetter, K. (1996). „Können und sollen mathematisch besonders befähigte Schüler schon in der Grundschule identifiziert und gefördert werden? Ein Bericht über einschlägige Überlegungen und erste Erfahrungen." ZDM Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 5, S. 143-157.

Pamperien, K. (2004). Strukturerkennung am Dreiecksschema. Der Mathe-Treff für Mathe-Fans. Fragen zur Talentsuche im Rahmen eines Forschungs- und Förderprojekts zu besonderen mathematischen Begabungen im Grundschulalter. M. Nolte. Hildesheim, Franzbecker.

Radatz, H. & Rickmeyer, K. (1996). Aufgaben zur Differenzierung. Hannover, Schroedel.

Rost, D. H. (2000): Hochbegabte und hochleistende Jugendliche. Münster. Waxmann Verlag.

Rost, D. H. (2000). Grundlagen, Fragestellungen, Methode. Hochbegabte und hochleistende Jugendliche. D. H. Rost. Münster, Waxmann Verlag, S. 1-91.

Scherer, P. (1995). Entdeckendes Lernen in Mathematikunterricht der Schule für Lernbehinderte. Theoretische Grundlegung und evaluierte unterrichtspraktische Erprobung. Heidelberg, Universitätsverlag C. Winter.

Schilling, S. & Rost, D. H. (1999). Was ist "besondere Begabung"? "Hilfe, mein Kind ist hochbegabt!" IQ 130. Förderung von besonderen Begabungen in Hessen. Heft 1: Grundlagen. H. Kultusministerium. Wiesbaden, Hessisches Landesinstitut für Pädagogik (HeLP), S. 10-13.

Schmidt, R. (1982). „Die Zählfähigkeit der Schulanfänger. Ergebnisse einer Untersuchung (1).” Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe 10, S. 371-376.

Schwippert, K., Bos, W. & Lankes, E.-M. (2003): Heterogenität und Chancengleichheit am Ende der vierten Jahrgangsstufe im internationalen Vergleich. In: Bos, W. et al.: Erste Ergebnisse aus IGLU... Münster, Waxmann Verlag, S. 265-302.

Selter, C. (1995). „Zur Fiktivität der 'Stunde Null' im arithmetischen Anfangsunterricht.” Mathematische Unterrichtspraxis.

Selter, C. (2004). „Mehr als Kenntnisse und Fertigkeiten. Basispapier zum Modul 2: Erforschen, entdecken und erklären im Mathematikunterricht.” Sinus-Transfer Grundschule.

Usiskin, Z. (1999). The Mathematically Promising and the Mathematically Gifted. Developing mathematically promising students. L. J. Sheffield. Reston, Virginia, National Council of Teachers of Mathematics.

Waldmann, M. R. (1996). Kognitionspsychologische Theorien von Begabung und Expertise. Psychologie des Lernens und der Instruktion. F. E. Weinert. Göttingen, Hogrefe-Verlag, S. 445-476.

Waldmann, M. & Weinert, F. E. (1990). Intelligenz und Denken. Perspektiven der Hochbegabungsforschung. Göttingen, Verlag für Psychologie Dr. C. J. Hogrefe.

Walther, G. (2004). „Modul 1: Gute und andere Aufgaben.” Basispapier zu Modul 1. Sinus-Transfer-Grundschule.

Walther, G., Geiser, H., Langeheine, R. & Lobemeier, K. (2003): Mathematische Kompetenzen am Ende der vierten Jahrgangsstufe. In: Bos, W. et al.: Erste Ergebnisse aus IGLU... Münster, Waxmann Verlag, S. 189-226.

Walther, G. & Lobemeier, K.: Analysen zur schwersten Aufgabe aus IGLU-E (2005). Erscheint in: Kaune, Ch., Schwank, I., Sjuts, J.: Mathematikdidaktik im Wissenschaftsgefüge: Zum Verstehen und Unterrichten mathematischen Denkens. Festschrift für Elmar Cohors-Fresenborg. Osnabrück.

Wieczerkowski, W. (1996). Ungewissheiten und Schwierigkeiten im Umgang mit einem hochbegabten Kind. In: Psychologie in Erziehung und Unterricht 43, S. 83-94.

Winner, E. (1998). Hochbegabt. Mythen und Realitäten von außergewöhnlichen Kindern. Stuttgart, Klett-Cotta.

Winter, H. (1984). „Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht." Grundschule 16, S. 24-29.

Programmträger: IPN, Kiel
Projektleitung: Prof. Dr. Manfred Prenzel
www.ipn.uni-kiel.de

SINUS-Transfer Grundschule
Projektkoordination am IPN: Dr. Claudia Fischer
Tel. +49(0)431/880-3136
cfischer@ipn.uni-kiel.de
www.sinus-grundschule.de

Programmkoordination für die Länder durch das Ministerium für Bildung und Frauen des Landes Schleswig-Holstein (MBF)
MR Werner Klein (SINUS-Transfer Grundschule)
http://landesregierung.schleswig-holstein.de

Landeskoordinatorenausbildung durch das Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung
StD Christoph Hammer; gemeinsam mit dem IPN
www.isb.bayern.de

Serverbetreuung: Zentrum zur Förderung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts der Universität Bayreuth (Z-MNU)
Leitung: Prof. Dr. Peter Baptist
http://zmnu.uni-bayreuth.de

Hinweis: Die Modulbeschreibungen sind während der Laufzeit des Programms SINUS-Transfer Grundschule (2004-2009) entstanden.
Die Liste der Kooperationspartner galt für diesen Zeitraum. Im Nachfolgeprogramm *SINUS an Grundschulen* sind die Kooperationen anders strukturiert.

ISBN für diese Modulbeschreibung (Mathematik G5)
978-3-89088-184-3