SINUS-Transfer: Erläuterung zu Modul 5

Kompetenzzuwachs erleben – durch Vernetzen und Vertiefen von Mathematik

Andreas Büchter

Die Betrachtung von Unterricht kann von verschiedenen Perspektiven aus erfolgen: Mit Blick auf Lernprozesse oder mit Blick auf die Ergebnisse von Lernprozessen, also auf Kompetenzen, die Schülerinnen und Schüler erworben haben. Diese Kopplung von Lernprozess und Kompetenzen kann auf verschiedenen Ebenen im Schulsystem unterschiedlich genutzt werden:

Aktuell werden mit einer Reihe bildungspolitischer Maßnahmen neue Steuerungsinstrumente in das deutsche Schulsystem eingeführt:

- Über die Erfassung von Schülerleistungen, z. B. im Rahmen von PISA oder Vergleichsarbeiten, sollen Informationen über die bei Schülerinnen und Schülern vorhanden Kompetenzen gewonnen werden. Darüber erhofft man sich auch Auskunft über die Qualität von Unterricht (als schulisch organisiertem Lernprozess).
- Die neuen Lehrpläne für das Fach Mathematik orientieren sich in vielen Bundesländern stark an den KMK-Bildungsstandards (KMK 2004, 2005). Die Vergleichbarkeit der schulischen Ausbildung soll durch die Vorgabe von Kompetenzerwartungen erreicht werden. Alte Lehrpläne haben stattdessen detaillierte Angaben zum Lernprozess gemacht: Verpflichtende und optionale Unterrichtsinhalte und deren zeitliche Abfolge wurden festgelegt.

Für die Lehrerinnen und Lehrer bedeutet dies, dass sie – ausgehend von den Kompetenzerwartungen der neuen Lehrpläne – die Lernprozesse ihrer Schülerinnen und Schüler eigenverantwortlich mit großen Gestaltungsspielräumen planen müssen. Bei der langfristigen Planung des Unterrichts stellt sich insbesondere die Frage, welche Kompetenzen Voraussetzung für das Gelingen welcher Lernprozesse sind: *„Der Zuwachs an … Kompetenzen ist … zugleich Ergebnis des Lernens und die Voraussetzung für das Lernen (auf höherem Niveau)*“ (BÜCHTER & LEUDERS 2005, S. 188).

Schließlich spielt die Vergewisserung über eigene Kompetenzen und Kompetenzzuwächse in Leistungs- und Anwendungssituationen[1] bei den Schülerinnen und Schülern eine wichtige motivationale Rolle: Das Erleben von Kompetenzzuwachs kann zu einem „Motor des Lernens“ werden (vgl. BÜCHTER & LEUDERS 2005, Kap. 5.3; BONSEN, BÜCHTER & VAN OPUYSEN). Im Gutachten zur Vorbereitung des Programms SINUS (BLK 1997) wird aus diesem

[1] Hier sind sowohl außer- als auch innermathematische Situationen gemeint. Die Bezeichnung von Realitätsbezügen als „Anwendungssituation“ ist üblich und bedarf keines weiteren Kommentars. Innermathematisch können vorhandene Kompetenz z. B. in Erkundungs- oder Übungsaufgaben angewendet werden.

Grund im Kapitel 9.2 „Unterrichtsbezogene Maßnahmen empfohlen, ein Modul „Zuwachs von Kompetenz erfahrbar machen: Kumulatives Lernen“ im Programm vorzusehen:

> *„Lernanstrengungen lohnen sich dann, wenn ersichtlich ist, was man hinterher kann. Schülerinnen und Schüler, die sich über mehrere Jahre mit mathematischen und naturwissenschaftlichen Inhalten auseinandersetzen, müssen spüren können, daß sie in ihrer fachbezogenen Kompetenzentwicklung sukzessive voranschreiten. Dies wird dann erfahrbar, wenn sie eine Vorstellung darüber entwickeln konnten, wie die Lerninhalte aufeinander aufbauen und in dieser Verknüpfung die Grundlage für ein Verständnis komplexer Sachverhalte schaffen.“* (BLK 1997, Kap. 9.2)

Was können diese bisher angestellten, fächerübergreifend gültigen Betrachtungen spezifisch für den Mathematikunterricht bedeuten? Zunächst lässt sich festhalten, dass Schülerinnen und Schüler (auch) im Mathematikunterricht die Möglichkeit haben müssen, sich selbst als Akteure des Mathematiktreibens zu erleben. Nur so können sie eigene Kompetenzen erfahren und sich ihres eigenen Kompetenzzuwachses vergewissern. Schülerinnen und Schüler sollen Mathematik selbst (nach-)erfinden und anwenden, statt „fertige Mathematik“[2] nachzuvollziehen und durch intensives Üben „einzuschleifen“.

Diese Auffassung von Mathematik als Tätigkeit und Mathematikunterricht, der Schülerinnen und Schüler für diese Tätigkeit interessiert, motiviert, qualifiziert und ihnen Raum für echte mathematische Eigentätigkeit einräumt stellt den Kern von HANS FREUDENTHALS „Realistic Mathematics Education (RME)“[3] dar (vgl. FREUDENTHAL 1973). So können Schülerinnen und Schüler authentisch Mathematik treiben (vgl. BÜCHTER & LEUDERS 2005, Kap. 3.1): Sie entwickeln Begriffe, entdecken Zusammenhänge und wenden diese an. Aus Sicht der Schülerinnen und Schüler ist es sinnvoll von „Mathematik erfinden“ zu sprechen, da es für sie tatsächlich neu ist – sie arbeiten als „kleine Mathematiker/innen“. Da vor ihnen schon viele andere Menschen diese Erfindungen gemacht oder nachvollzogen haben spricht FREUDENTHAL von „nacherfinden“ (vgl. FREUDENTHAL 1973, Bd. 1, S. 116). Das Mathematiktreiben selbst ist immer ein Mathematisieren von Ausgangssituationen: Bei den Anwendungen bzw. Realitätsbezügen ist es das Entwickeln eines mathematischen Modells, innermathematisch ist es die Vertiefung von Mathematik, z. B. des Rechnens mit konkreten Zahlen durch die Einführung von Variablen (also eine Mathematisierung der Mathematik).

Im Folgenden wird zunächst der für Kompetenzzuwächse relevante Begriff „kumulatives Lernen“ erläutert, bevor verschiedene Arten des Mathematisierens aufgabenbezogen unter-

---

[2] Unter „fertiger Mathematik“ wird das konsolidierte mathematische Wissen verstanden, über das man heute (kollektiv) verfügt. Für die Schulmathematik sind damit vor allem Rechenregeln, Verfahren, Definitionen und konventionelle Bezeichnungen gemeint. Diese sollen natürlich nach wie vor ihren Platz im Mathematikunterricht haben, allerdings erst nachdem die Schülerinnen und Schüler Platz für eigene Konstruktionen hatten und so z. B. konventionelle Bezeichnungen als Grundlage für Kommunikation über Mathematik verstehen können.

[3] Das Adjektiv „realistic“ weist dabei nicht auf Realitätsbezüge hin. Es stammt vielmehr vom niederländischen „zich realiseren“ – sich etwas vorstellen können. Mathematik soll also an vorstellbaren Problemen entwickelt werden. Solche Probleme können innermathematischer Natur sein, nur müssen die Schülerinnen und Schüler bereits über tragfähige Vorstellungen von den involvierten Konzepten verfügen, um sich produktiv mit den Problemen auseinandersetzen zu können. (vgl. VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN 2003)

schieden werden. Schließlich werden Anforderungen an Aufgaben und Unterrichtssituationen begründet, die es ermöglichen, dass Schülerinnen und Schüler Kompetenzen und Kompetenzzuwächse erleben können.

1 Kumulatives und additives Lernen

Kumulatives Lernen in Unterricht lässt sich am besten in Abgrenzung zum additiven Lernen bzw. additiven Wissen charakterisieren:

> *„Der Schulunterricht versucht, den Aufbau von Wissen (Lernprozesse bei Schülerinnen und Schülern) zielgerichtet anzuregen und zu unterstützen. In optimal verlaufenden Lernprozessen greifen additiver und kumulativer Wissensaufbau ineinander. Die Lernenden werden mit neuen Stoffgebieten vertraut gemacht, mit denen die verfügbare Wissensbasis nicht nur differenziert und erweitert, sondern auch qualitativ in einem vertieften Verständnis neu organisiert wird. […]*
>
> *Ist kumulatives Lernen das Ziel des Unterrichts, so muß dieser derart gestaltet sein, daß er eine qualitative Veränderung der Wissensstruktur des Lernenden erreicht. Nimmt das Wissen lediglich quantitativ aber unvernetzt zu, so findet ausschließlich additives Lernen statt.“ (HARMS & BÜNDER 1999)*

Additives Lernen ist in der Regel weniger nachhaltig als kumulatives Lernen: Ein typisches Beispiel für im Wesentlichen additives Lernen und Wissen ist der Theorieunterricht in der Fahrschule. Hier müssen Rechtsnormen gelernt werden, ohne dass sie aus vorhandenem Wissen abgeleitet werden können. Transferleistungen sind die Ausnahme: In einigen Prüfungsfragen sind Verkehrsituationen dargestellt, bei denen z. B. aus mehreren Vorfahrtsregeln kombiniert und geschlossen werden muss, in welcher Reihenfolge die Akteure fahren dürfen. Im Bereich der Verkehrsschilder lässt sich allerdings das Lernen durch so etwas wie „lokales Ordnen“ vereinfachen. So drücken runde Schilder mit einem roten Rand grundsätzlich Verbote aus. Dies kann als übergeordnete Regel gelernt und auf einzelne Schilder übertragen werden – oder aus einigen Schildern induktiv geschlossen und auf andere übertragen werden. Dieser Wissensaufbau in Zusammenhängen ist dann schon eher kumulativ: Die Bedeutung einer Gruppe von Verkehrsschildern werden Sie vermutlich deutlich besser kennen als einzuhaltende Abstände vor Fußgängerüberwegen.

Mathematik – so heißt es – ist ein Paradebeispiel für „kumulatives Wissen“, wobei hiermit offensichtlich die „fertige Mathematik“ gemeint ist. Leider werden allzu oft und entgegen der FREUDENTHAL’schen Ansätze die Gestaltung von mathematischen Lernprozessen mit der Gestalt der Mathematik gleichgesetzt. Die Kumulativität der Mathematik drückt sich auch im Arbeitsprinzip „Zurückführen auf Bekanntes“ aus. Aber natürlich gibt es auch eine Vielzahl von Setzungen, die zwar sinnvoll begründet sind, aber auch hätten anders gestaltet werden können. Lassen Sie Ihre Schülerinnen und Schüler doch mal eine Erörterung schreiben:

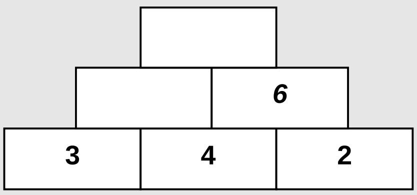
Ist ein Quadrat auch ein Trapez? Was denkst du?

Notiere eine Antwort zu der Frage und schreibe einen Aufsatz, in dem du erörterst, ob diese Antwort sinnvoll ist. Gehe dabei auf die Frage ein, wie andere Antworten aussehen könnten.

Beispiel 1: Definition von Vierecken

Aus den Bearbeitungen der Schülerinnen und Schüler können Sie viel über deren individuelle geometrische Begriffsbildungen und deren Bild von Mathematik lernen – und die Schülerinnen und Schüler bekommen beim Schreiben eines solchen mathematischen Aufsatzes die Gelegenheit, den Bereich Vierecke für sich selbst zu ordnen.

Wann immer sich Neues direkt auf Bekanntes zurückführen lässt, liegt es nahe, wie kumulatives Lernen angeregt werden kann: Die Beziehungen müssen bewusst gemacht werden – sei es durch die Verwendung ähnlicher Kontexte oder durch explizite Reflektion. So können Zahlenmauern von den ersten Jahren in der Grundschule bis zum Ende der Schullaufbahn produktiv genutzt werden (vgl. HEFENDEHL-HEBEKER 2003):



Hier siehst du eine Zahlenmauer.

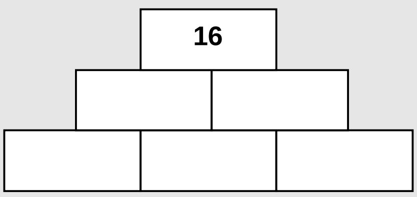
In der untersten Reihe hat schon jeder Stein eine Zahl. Jeder Stein in den Reihen darüber liegt jeweils auf zwei anderen „Trägersteinen“. Seine Zahl erhältst du, in dem du die beiden Zahlen der Trägersteine addierst. So bekommt der rechte Stein in der zweiten Reihe eine 6.

Ergänze die fehlenden Zahlen

Beispiel 2: Einführung von Zahlenmauern

Zunächst können Zahlenmauern für einfache, produktive Übungen genutzt werden: Einfache Additionsaufgaben liegen nahe, aber auch erste Umkehraufgaben, z. B. wenn ein „Basisstein“ keine Zahl erhält und dafür der oberste Stein. Funktionale Betrachtungsweisen liegen ebenfalls nahe – „Was passiert mit dem obersten Stein, wenn der linke Basisstein um 1, 2, 3 usw. vergrößert wird? Was, wenn der mittlere Stein verändert wird?“

Diese funktionalen Betrachtungen verdeutlichen, dass der Kontext Zahlenmauer gut geeignet ist, den Variablenbegriff vorzubereiten und einzuführen. Später lassen sich viele anspruchsvolle Aufgaben bearbeiten, bei denen die Algebra zumindest hilfreich ist:



Hier siehst du eine Zahlenmauer, mit 16 als obersten Stein.

Finde alle möglichen ganzzahligen Belegungen der Basissteine!

Was passiert, wenn auch rationale oder reelle Zahlen zugelassen werden?

Beispiel 3: Problemlöseaufgabe mit einer Zahlenmauer

Werden Zahlenmauern als innermathematische Kontexte während der gesamten Schulzeit genutzt, so ist für Schülerinnen und Schüler ein roter Faden im Lernen (nicht nur oberflächlich) erkennbar.

Immer dann, wenn sich Neues nicht auf Bekanntes zurückführen lässt, sondern bedingt willkürliche Festlegungen eine Rolle spielen, kann Mathematik eher additiv oder eher kumulativ gelernt werden. Dies wird am Beispiel der Primzahlen verdeutlicht:

Schreibe die ersten zehn Primzahlen auf. Wie entscheidest du, ob eine Zahl eine Primzahl ist?

Beispiel 4: Was sind Primzahlen?

Vor allem, wenn Primzahlen und Teilbarkeitsfragen bei Ihren Schülerinnen und Schülern schon länger zurückliegen, werden die Bearbeitungen der beiden Teilaufgaben sehr interessant sein und auch auf die Qualität der bereits länger zurückliegenden Lernprozesse hinweisen:

Am Beginn der Zahlenreihe der ersten zehn Primzahlen wird bei einigen Schülerinnen und Schülern die 1 auftauchen. Ebenso kommt es vor, dass die 2 nicht in der Zahlenreihe vertreten ist. Bei den größeren Zahlen werden die meisten Bearbeitungen weniger interessant sein. Den Hintergrund für die nicht zur Norm passenden Bearbeitungen, die 1 als Primzahl vorsehen oder die 2 nicht nennen, können Sie möglicherweise in der Beantwortung der Zusatzfrage erkennen.

Viele Schülerinnen und Schüler lernen, was eine Primzahl ist, eher additiv über Merksätze und Eselsbrücke und seltener kumulativ aus sinnstiftenden Anwendungszusammenhängen heraus. Typische Einschätzung bezüglich der 1 und der 2 lauten:

– „Die 1 ist eine Primzahl, weil sie nur durch 1 und sich selbst teilbar ist.“
– „Gerade Zahlen können keine Primzahlen sein, also ist die 2 keine Primzahl.“

Natürlich haben diese beiden Einschätzungen unterschiedliche Qualität. Bei der 2 war es in der Entwicklung der Mathematik unstrittig, dass sie eine Primzahl ist – unabhängig davon, welcher Vorschlag für die Definition von Primzahlen zugrund liegt[4]. Dass die 1 heute nicht unter die definierten Primzahlen fällt, ist hingegen weniger selbstverständlich:

> *„Warum heißt Carl Friedrich Gauß mit Vornamen Carl Friedrich? Die Antwort fällt leicht: Weil seine Eltern ihn so genannt hatten. Sie hatten vielleicht gute Gründe dafür, ihn so zu nennen, vielleicht hieß ein reicher Erbonkel so, oder es entsprach einer Familientradition.*

[4] Allgemeiner werden in der Zahlentheorie „Primelemente“ definiert. Die abstrakter anmutende allgemeine Definition ist für die positiven ganzen Zahlen äquivalent zu „Eine Zahl heißt Primzahl, wenn genau zwei verschiedenen Teiler hat: 1 und sich selbst“ (siehe z. B. http://de.wikipedia.org/wiki/Primzahl).

Ähnlich verhält es sich mit der 1 als Primzahl. In der Geschichte der Mathematik wurde die 1 von manchen Mathematikern als Primzahl betrachtet, von anderen nicht.“

(http://de.wikibooks.org/wiki/Mathematik:_Zahlentheorie:_Warum_1_keine_Primzahl_ist)

Den Sinn der heute allgemein akzeptierten Definition, dass 1 keine Primzahl ist, können Schülerinnen und Schüler selbst bei Anwendungen von Primzahlen herstellen: So wäre die Primfaktorzerlegung ohne diese Festlegung nicht eindeutig; die kombinatorische Bestimmung der Anzahl der Teiler einer Zahl aus ihrer Primfaktorzerlegung würde ebenfalls nicht wie gewohnt funktionieren. Wer von diesen Phänomenen aus die Frage diskutiert, ob 1 eine Primzahl ist, und die aktuelle Festlegung mit Sinn füllt, wird dies nachhaltig lernen – und zwar kumulativ und nachhaltig, anstatt über Merksätze.[5]

Phänomene, die typisch für die Entstehung und Anwendung von Mathematik sind, können immer wieder sinnstiftend wirken, sodass Schülerinnen und Schüler Festlegungen und mathematische Zusammenhänge nacherfinden (vgl. FREUDENTHAL 1983). Im Kleinen sollten z. B. „Intentionale Probleme“ (vgl. HUßMANN 2002) zum Ausgangspunkt des Lernens gemacht werden, im Großen muss wie bei den Zahlenmauern ein roter Faden für die Schülerinnen und Schüler erkennbar sein. Mit Blick auf solche rote Fäden wird gerade für den Mathematikunterricht ein Spiralcurriculum gefordert, in dem Themen und Inhalte nicht an einer Stelle erschöpfend „behandelt“ werden, sondern früh aufgegriffen und später vertieft werden.

Wird in Klasse 6 oder 7 die Prozentrechnung eingeführt, ist es nahe liegend auch Aspekte exponentiellen Wachstums zu thematisieren:

– Eine Population wächst jährlich um einen bestimmten Prozentwert. Die Entwicklung lässt sich grafisch darstellen, die Qualität des exponentiellen Verhaltens erfassen.
– Zins- und Zinseszinsrechnung werden üblicherweise intensiv durchgeführt, Zinseszinsrechnung allerdings nur selten bzgl. des exponentiellen Wachstums erfahrbar. Dabei liegt gerade hierin der Kern der Überschuldungsproblematik, für die ein allgemeinbildender Mathematikunterricht sensibilisieren sollte.

Am Ende der Sekundarstufe I kann dann auf solche Erfahrungen mit exponentiellem Verhalten zurückgegriffen und dieses Verhalten algebraisch weiter mathematisiert werden. Dann werden auch Umkehrprobleme einfach lösbar – sei es mithilfe des Logarithmus oder mithilfe systematischen Probierens und Intervallschachtelung.

Phänomene dieser Art, bei denen das Weiterdenken, das Streben, weiter zu mathematisieren, mitgeliefert werden, bilden nicht die Ausnahme, sondern die Regel – sie müssen nur genutzt werden. Für Lehrerinnen und Lehrer ist dabei wie für Schülerinnen und Schüler wichtig, eine permanente Fragehaltung zu entwickeln und Fragen an die Phänomene zu stellen. Viele Fra-

[5] In der Schulmathematik nicht ohne weiteres erfahrbar ist, dass sehr viele Sätze der Zahlentheorie einfach für alle Primzahlen formuliert werden können, wenn die 1 per definitionem keine Primzahl ist. Wäre sie eine Primzahl, müsste sie bei der Formulierung dieser Sätze explizit ausgeschlossen werden.

gen können zumindest qualitativ erfasst, wenn auch nicht immer direkt exakt berechnet werden – so können natürlich auch schon Schülerinnen und Schüler in Klasse 6 den Flächeninhalt eines Kreises annähernd bestimmen (ein Unterrichtsbeispiel findet man bei MÜLLER 2006).

Wie können Schülerinnen und Schüler nun in einem derart kumulativ gestalteten Mathematikunterricht ihre vorhandenen Kompetenzen im Zusammenspiel und Kompetenzzuwächse erleben? Hierfür werden in Anlehnung an HANS FREUDENTHAL in den nächsten beiden Abschnitten zwei Strategien vorgeschlagen: Das horizontale und das vertikale Mathematisieren.

2 Horizontales Mathematisieren: Mathematik anwenden und vernetzen

Beim horizontalen Mathematisieren steht die Vernetzung und Anwendung vorhandener Kompetenzen im Vordergrund. Die Phänomene können hierfür auch der Mathematik entstammen, in der Regel sind hierfür aber Realitätsbezüge besonders reichhaltig. Schülerinnen und Schüler können dabei in natürlicher Weise erleben, wie verschiedene mathematische Hilfsmittel zusammenwirken, und so auch ein angemessenes Bild von Mathematik entwickeln, bei dem Inhaltsgebiete wie Geometrie, Arithmetik, Algebra und Stochastik nicht unverbunden nebeneinander stehen.

Ein Aufgabentyp, der sich häufig sehr gut eignet, um Mathematik vernetzt anzuwenden und den Schülerinnen und Schülern das Erleben ihrer Kompetenzen ermöglicht sind Fermi-Aufgaben (vgl. BÜCHTER & LEUDERS 2005, S. 158ff.).

„Wie viel Wasser wird an eurer Schule in einem Jahr verbraucht?“
„Wie viele Verkehrsschilder stehen in eurer Stadt?“
„Wie viele Streichhölzer kann man aus einer ausgewachsenen Tanne machen?“
„Wie viele ALDI-Märkte könnten die Brüder Albrecht mit ihrem Vermögen leer kaufen?“

Beispiel 5: Fermi-Aufgaben

Bei der Bearbeitung dieser Aufgaben vernetzen Schülerinnen und Schüler verschiedene inhalts- und prozessbezogene Kompetenzen. Bei der Frage nach der Anzahl der Verkehrsschilder kann z. B. mit einer „Flächenstrategie“ gearbeitet werden:

– Wie groß ist unsere Stadt?
– Wie viele Verkehrsschilder stehen durchschnittlich auf einem Quadratmeter?
– Wie viele stehen dann insgesamt in unserer Stadt?

Dabei werden Kompetenzen im den Bereichen Flächenberechnung, Mittelwerte und Proportionalität benötigt. Zuvor musste die große Frage in geeignete Teilfragen zerlegt und die für die Teilfragen benötigten Werte müssen sinnvoll geschätzt werden. So oder so ähnlich verlaufen typische Bearbeitungsprozesse bei Fermi-Aufgaben. Typisch sind der Umgang mit Proportionalität, mit Maßeinheiten, das Schätzen von Werten und die Nutzung von Stützpunktvorstellungen. Darüber hinaus werden aufgabenspezifisch weitere Kompetenzen benötigt.

Das Zusammenspiel verschiedener mathematischer Inhalte und typischer mathematischer Arbeitsweisen ist ein wichtiger Aspekt bei dieser Art von Aufgaben, die Mathematik in ihrer Vernetztheit erfahrbar machen. Darüber hinaus können alle Schülerinnen und Schüler ihre eigenen Kompetenzen erleben, auch diejenigen, die sonst eher Schwierigkeiten in Mathematik haben, z. B. mit der Beherrschung von Rechenverfahren:

– Das Zerlegen der großen Fragen in Teilfragen (eine Problemlösekompetenz) gelingt häufig allen Schülerinnen und Schülern, wobei hier Kreativität und Flexibilität nützlich sein können.
– Über geeignete Stützpunktvorstellungen („Wie hoch sind 10 m?“, „Wie groß ist ein Erwachsener durchschnittlich?“) verfügen viele Schülerinnen und Schüler ebenfalls unabhängig von anderen mathematischen Kompetenzen.
– Schließlich kommt es bei (vorläufigen) Ergebnissen darauf an, ihre Plausibilität zu überprüfen. Nicht jeder, der die Grundrechenarten sicher bei der Ermittlung eines Ergebnisses anwendet, kann dieses hinterher auch sinnvoll mit Alltagserfahrungen konfrontieren – und umgekehrt.

Da es bei den typischen Fermi-Aufgaben keine exakten Ergebnisse, sondern häufig „nur“ plausible Größenordnungen gibt, tritt die Frage „Ist mein Ergebnis richtig?“ nach einiger Gewöhnung an diese Aufgaben kaum noch auf. Dieses Fehlen von richtigen Ergebnissen und Musterlösungen führt zu einer eher kompetenzorientierten Sichtweise – bei Schülerinnen und Schülern genauso wie bei Lehrkräften. Die Schülerinnen und Schüler registrieren dabei in ihren eigenen Bearbeitungen vor allem die Teile, die erfolgreich im Sinne von „angemessen“ waren.

Neben solchen Fermi-Aufgaben eignen sich andere Aufgabentypen, bei denen ein Realitätsbezug im Vordergrund steht häufig gleichermaßen – wenn der Realitätsbezug ernst genommen wird und nicht nur von der Mathematik, die im Lehrplan steht, auf ihn geschaut wird: Die Fragen, die unsere Umwelt bereit hält, orientieren sich eben nicht an den Schubladen der mathematischen Inhaltsgebiete. Fast alle Phänomene lassen sich auf unterschiedliche Arten mathematisieren.

Natürlich bieten nicht nur Realitätsbezüge Anlässe für die Vernetzung von unterschiedlichen mathematischen Kompetenzen: Beim Zeichnen eines Kreisdiagramms zu vorgegebenen Daten müssen z. B. absolute Häufigkeiten bestimmt werden, diese in Anteile (relative Häufigkeiten) umgerechnet werden, diese Anteile in Kreisanteile umgerechnet werden und diese dann gezeichnet werden. Neben Kompetenzen aus der beschreibenden Statistik werden also der kompetente Umgang mit rationalen Zahlen, geometrische Kenntnisse und Fertigkeiten und der angemessene Umgang mit Proportionalität benötigt. Dies kann zum Ausgangspunkt einer Reflexion gemacht werden (s. u. „Anforderungen an Unterrichtssituationen“):

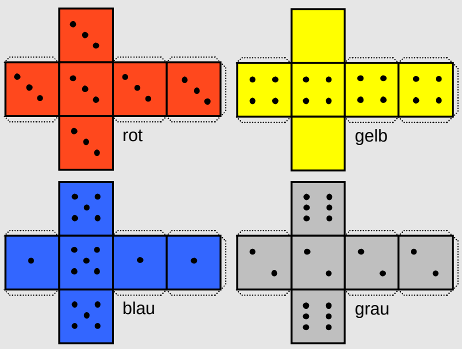
– Was habt ihr bei der Bearbeitung der Aufgabe alles gemacht?
– Welche mathematischen Inhalte wurden dabei verwendet?

– Welche Inhalte könnten hiermit noch zusammenhängen?

3 Vertikales Mathematisieren: Mathematik entwickeln und vertiefen

Beim vertikalen Mathematisieren steht die Weiterentwicklung der Mathematik im Vordergrund. Wenn z. B. mit Zahlenmauern (s. o.) gearbeitet wird – vor allem wenn diese auch mehr als drei Reihen haben –, dann kann zunächst mit konkreten Zahlen gerechnet werden, Lösungen können durch systematisches Probieren gewonnen werden. Werden funktionale Zusammenhänge bei Zahlenmauern – wie oben dargestellt – stärker in den Blick genommen und Variablen von Schülerinnen und Schülern nacherfunden um Fragestellungen zu bearbeiten, dann haben die Schülerinnen und Schüler ihre Mathematik, d. h. die selbst nacherfundenen mathematischen Mittel, weiterentwickelt. Der innermathematische Kontext „Zahlenmauer“ wird mithilfe von Variablen wiederum mathematisch beschrieben (algebraisiert), die Mathematik wird mathematisiert – oder: (weiter-)entwickelt und vertieft.

An einem Beispiel aus der Stochastik wird gezeigt, wie ein Kontext – sogar eine Aufgabenstellung vom Ende der Grundschule bis in die gymnasiale Oberstufe als produktiver Anlass zum Mathematiktreiben (oder: mathematisieren) genutzt werden kann:



Spielt zu zweit das Spiel „Merkwürdige Würfel“:

1. Der oder die Jüngere darf sich zuerst einen Würfel aussuchen. Der oder die Ältere darf dann einen der übrigen Würfel wählen.
2. Nun werft ihr elf Mal gegeneinander und notiert bei jedem Wurf, wer die höhere Zahl hat. Wer am Ende am häufigsten die höhere Zahl hatte, hat das Spiel gewonnen.

   Wenn ihr noch einmal spielen wollt, darf der Verlierer zuerst einen Würfel auswählen.

Später sollt ihr gegen ein Zweierteam von einem anderen Tisch spielen.
Überlegt euch dafür eine möglichst gute Strategie!

Beispiel 6: Merkwürdige Würfel (vgl. BÜCHTER 2005)

Falls Sie diese von BRADLEY EPHRON erfundenen Würfel noch nicht kennen, sollten Sie sich an dieser Stelle vielleicht etwas Muße gönnen und selbst darüber nachdenken, was bei diesem Spiel wohl passieren wird, was der mathematische Gehalt ist und was Ihre Schülerinnen und Schüler konkret machen würden.

Die Aktivitäten der Schülerinnen und Schüler hängen vermutlich stark von deren stochastischen Vorkenntnissen und natürlich auch von deren Alter ab[6]. Mögliche Aktivitäten sind

[6] In anderen Inhaltsgebieten gibt es etablierte Chronologien der einzelnen Themen und Inhalte über die gesamte Schulzeit hinweg. In der Stochastik unterscheiden sich die Lehrpläne zwischen den Bundesländern hingegen noch erheblich, sodass nicht gesagt werden kann, was ein Sechstklässler durchschnittlich können sollte: In einigen Bundesländern stehen z. B. zweistufige Zufallsexperimente am Beginn der Sekundarstufe I, in anderen erst

– die konkrete, handelnde Erfahrung mit den Würfeln beim wiederholten Spielen, wobei erste Vermutungen angestellt werden, welcher Würfel „gut“ ist,
– die Analyse einzelner Würfel („Beim Roten fällt immer die 3, beim Grauen fällt die 2 doppelt so oft wie die 6.“),
– die Analyse eines ausgewählten Würfelpaares („Ist der Rote besser als der Graue?“),
– die Analyse aller möglichen Konstellationen beim Spiel – und die darauf basierende Formulierung einer Stratege,
– eine Untersuchung des ungünstigen Falls („Auch wenn der Graue besser ist als der Blaue, kann mit etwas Pech beim Grauen oft die 2 und beim Blauen oft die 5 fallen.“),
– …

Die mathematische Analyse der vier Würfel deckt ein faszinierendes Phänomen auf: Es gibt keinen besten Würfel! Zwar lässt sich zu jedem Würfel einer finden, der besser ist – konkreter: in einem einzelnen Wurf gegeneinander eine Gewinnwahrscheinlichkeit von $^2/_3$ hat – aber eine mögliche Anordnung nach „besser“ ist kreisförmig (oder mathematisch ausgedrückt: nichttransitiv). Der Blaue ist schlechter als der Graue, der Graue schlechter als der Rote, der Rote schlechter als der Gelbe und der Gelbe schlechter als der Blaue – und das jeweils mit den Gewinnwahrscheinlichkeiten von $^1/_3$ für den schlechteren Würfel.

Wie können Schülerinnen und Schüler hier auf verschiedenen Stufen Mathematik entwickeln und vertiefen?

– Bei der konkreten Auseinandersetzung mit dem Spiel und der Analyse einzelner Würfel können sie einen Zugang zum Wahrscheinlichkeitsbegriff bekommen. Dabei spielt die (theoretische) Gleichwahrscheinlichkeit der sechs Würfelseiten („Laplace-Wahrscheinlichkeit“) genauso eine Rolle wie die in konkreten Durchführungen gewonnene relative Häufigkeit für die einzelnen Ergebnisse („statistische Wahrscheinlichkeit“, vgl. BÜCHTER 2006a).
– Die Analyse eines ausgewählten Würfelpaares kann dazu führen, dass kombinatorische (36 mögliche Kombinationen von den jeweils sechs Würfelseiten) Hilfsmittel oder Baumdiagramme (zwei Stufen mit den jeweiligen Ausgängen und Wahrscheinlichkeiten) entwickelt werden – so oder so entstehen dabei Analysemöglichkeiten für mehrstufige Zufallsversuche.
– Der Versuch, die Würfel zu ordnen und die Entdeckung des Phänomens „kein Würfel ist generell der beste“, führt in der Regel zu weiteren Fragen: Geht das Ganze auch mit anderen Würfeln? Lässt sich ein fünfter Würfel hinzufügen, sodass das Phänomen erhalten bleibt? Die Untersuchung dieser Fragen führt zu einer Vertiefung von Mathematik deutlich über die Analyse des Spiels hinaus.
– Die Analyse des „ungünstigen Falls“ schließlich kann zur Entwicklung der Binomialverteilung – zumindest im konkreten Fall – führen. Auch wenn der blaue Würfel gegen den

am Ende – dafür sollen dort dann andere Inhalte der Stochastik bereits am Beginn der Sekundarstufe I unterrichtet werden.

grauen nur eine Gewinnwahrscheinlichkeit von $^1/_3$ hat: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der blaue Würfel bei elf Würfen gegen den grauen gewinnt?

Da die „merkwürdigen Würfel“ auf vielen verschiedenen Niveaus Anlass zum Mathematisieren, zur Anwendung und Weiterentwicklung von Mathematik geben, können Schülerinnen und Schüler mit ganz unterschiedlichen Kompetenzen sich produktiv mit diesem Phänomen auseinandersetzen, individuelle Wege beschreiten und individuelle Einsichten gewinnen – auch die eigene Mathematik wird jeweils individuell ausgeweitet und das kumulativ im Sinne eines sinnvollen Aufbaus auf Vorhandenes bzw. einer Vernetzung hiermit.

Offene Entdeckungsaufgaben wie die „merkwürdigen Würfel“ sind häufig gut geeignet, um Mathematik zu entwickeln und zu vertiefen. Wichtig ist dabei, dass sich immer wieder neue Fragen ergeben können, deren Untersuchung und Beantwortung ein weiteres Mathematisieren anregen. Der Unterricht muss den Schülerinnen und Schülern hierfür den entsprechenden Freiraum geben.

Neben dem Erleben der vorhandenen Kompetenzen können die Schülerinnen und Schüler wie zuvor beim horizontalen Mathematisieren (s. o.) ihre Kompetenzzuwächse vor allem durch Reflektieren erfahren:

– Was habt ihr bei der Bearbeitung der Aufgabe alles gemacht?
– Welche mathematischen Inhalte habt ihr dabei verwendet?
– Welche neuen Ideen, Begriffe oder Zusammenhänge habt ihr entwickelt?

Für die selbsttätige Einordnung neuer mathematischer Konzepte in das Netz der vorhandenen bieten sich hier vor allem individuell oder kollektiv angefertigte Mind-Maps oder Concept-Maps („Begriffslandkarten“) an (s. u.).

4 Anforderungen an Aufgaben und Unterrichtssituationen

In den vorangehenden beiden Abschnitten wurden mit dem horizontalen und vertikalen Mathematisieren zwei Strategien für den Unterricht vorgeschlagen, mit denen es den Schülerinnen und Schülern ermöglicht werden kann, dass sie ihre vorhandenen Kompetenzen erleben und Kompetenzzuwächse vor allem über Reflektion erfahren. Wenn dieses Kompetenzerleben bewusst zum Ziel von Unterrichtspassagen gemacht wird, stellt sich die Frage nach den Anforderungen an Aufgaben und Unterrichtssituationen hierfür. Welche Art von Aufgaben, welche Unterrichtsmethoden eignen sich besonders gut für diese Zielsetzung?

Auf der Ebene der *Aufgaben* lässt sich feststellen, dass sie je nach Zielsetzung sehr unterschiedlich aussehen können bzw. jeweils für eine Zielsetzung optimiert werden können (vgl. BÜCHTER & LEUDERS 2005, 2006). Über die Umsetzung der beiden oben dargestellten Strategien hinaus, sollten entsprechende Aufgaben

– *aktivierend* in dem Sinne sein, dass Schülerinnen und Schüler sich möglichst schon bei der Auswahl der Aufgaben oder Konkretisierung der Fragestellungen als Akteure erleben,
– *differenziert* sein, also Bearbeitungen auf vielen Niveaus zulassen, um allen Schülerinnen und Schülern sowohl eine Herausforderung als auch Erfolgserlebnisse zu ermöglichen, und
– *produktorientiert* sein, d. h. die Bearbeitungszeit und die sichtbaren Ergebnisse sollten in einem derartigen Verhältnis stehen, dass viele Erfolgserlebnisse nach nicht zu umfangreicher Bearbeitungszeit vorliegen können.

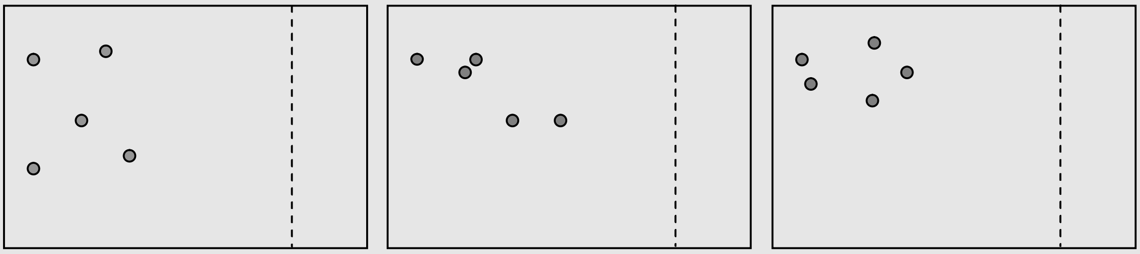
Ein Beispiel für eine solche Aufgabe ist die „Murmel-Aufgabe“ (vgl. BÜCHTER & MÜLLER 2006; BECKER & SHIMADA 1997, S. 25):

Drei Schüler werfen mit Murmeln und haben vereinbart: Es gewinnt derjenige, dessen fünf Murmeln hinter einer Ziellinie am dichtesten beieinander liegen bleiben. Immer wieder streiten sie sich darüber, wer gewonnen hat.

Finde (wenigstens) zwei verschiedene Möglichkeiten, wie man herausfinden kann, wer gewonnen hat.

In den Abbildungen a), b) und c) siehst Du drei Wurfergebnisse. Entscheide für jede deiner Möglichkeiten, welches Wurfergebnis gewonnen hätte.

Begründe, welche deiner Möglichkeiten dir als Spielregel am sinnvollsten erscheint.



a) b) c)

Beispiel 7: Die „Murmel-Aufgabe“

Die Murmelaufgabe ist *differenzierend*: Schülerinnen und Schüler können schon in der Grundschule mit einfachen Abstandsmessungen Ergebnisse erzielen, später können aufwändigere Entwürfe hinzukommen, die z. B. die Flächen von Polygonen berücksichtigen.

Sie ist *aktivierend*: Schülerinnen und Schüler können selbst festlegen, ob den Spielern die Regel, nach der ausgewertet wird, vorher bekannt ist (das kann erheblichen Einfluss auf „Wurf-Strategien“ haben), und sie können selbst entscheiden, was für sie „dicht beieinander liegen bleiben“ heißt.

Die Aufgabe ist *produktorientiert*: Gerade ältere Schülerinnen und Schülern finden schnell viele Möglichkeiten, wie man herausfinden kann, wer beim Murmelspiel gewonnen hat.

Wie sehen *Unterrichtssituationen* oder *Methoden* aus, die Schülerinnen und Schüler Kompetenzerleben ermöglichen? Am Ende des Abschnitts zum vertikalen Mathematisieren wurde betont, dass der Unterricht den Schülerinnen und Schülern Freiraum für eigene Fragen und eigene Richtungen der Bearbeitung lassen sollte. Die damit verbundene Eigenverantwortlichkeit ist kein Selbstzweck, sondern schlicht notwendig, wenn Schülerinnen und Schüler selbst

Mathematik entwickeln und anwenden sollen, um auf diesem Weg möglichst viel Mathematik möglichst nachhaltig zu lernen. Das Erleben der Kompetenzen selbst kann anhand von Aufgaben erfolgen, die den oben dargestellten Anforderungen genügen. *Kompetenzzuwachs* zu erfahren ist hingegen eher eine Frage des Unterrichts insgesamt und entsprechender Methoden: Da es immer um individuelle und kollektive „Längsschnittbetrachtungen" geht („Was konnten wir früher, was können wir heute?", „Wie hängt das soeben Gelernte mit anderem zusammen?"), sind vor allem Unterrichtsphasen zur Reflexion erforderlich.

Individuell können Schülerinnen und Schüler in Portfolios oder Lerntagebüchern oder mit Selbsteinschätzungsinstrumenten über ihren Kompetenzzuwachs reflektieren. Diese Methoden sind mittlerweile in der Allgemeinen Didaktik wie in der Mathematikdidaktik ausführlich beschrieben worden.

Mit der gesamten Lerngruppe können vor allem Mind-Maps oder Concept-Maps („Begriffslandkarte") genutzt werden. Dabei stellen Mind-Maps eher die Sichtweise von den Schülerinnen und Schülern aus dar („Was verbindet ihr alles mit dem Begriff ‚Zufall'?"), während Concept-Maps eher die „fertige Mathematik" im Auge haben („Welche mathematischen Begriffe, Zusammenhänge und Methoden hängen mit dem Kreisdiagramm zusammen?"). Beispiele für diese Instrumente finden sich auf dem Server von SINUS-Transfer (http://www.sinus-transfer.de) unter dem Material zu Modul 5.

5 In allen Phasen des Unterrichts: Kompetenzzuwachs erfahren

Im Gutachten zur Vorbereitung des Programms SINUS wird vor allem den Wiederholungsaufgaben die Funktion zugeschrieben, Schülerinnen und Schülern Rückmeldungen über ihren Kompetenzzuwachs zu geben:

> *„Aussagekräftige Rückmeldungen über ihren Kompetenzzuwachs erhalten die Schülerinnen und Schüler zum Beispiel durch Wiederholungsaufgaben, die in Neuerwerbsaufgaben eingebettet sind. Dabei wird ihr vorangegangener Lernfortschritt bestätigt. Sie spüren die Nützlichkeit des vorangegangenen Lernens und zugleich die Notwendigkeit weiterer Lernbemühungen." (BLK 1997, Kap. 9.2)*

Wiederholungsaufgaben sind für diesen Zweck mit Sicherheit gut geeignet. Schülerinnen und Schüler können aber auch in allen anderen Phasen des Unterrichts ihre vorhandenen Kompetenzen erleben und ihren Kompetenzzuwachs reflektieren:

– Beim *Erkunden, Entdecken und Erfinden* greifen Schülerinnen und Schüler auf vorhandene Kompetenzen zurück und können erfahren, wie diese hilfreich beim Mathematisieren neuer Phänomene sind und wie ihre Kompetenzen sich dabei erweitern.
  Eine reichhaltige Erkundung zu trigonometrischen Funktionen erfordert und ermöglicht z. B. die Anwendung von Kompetenzen aus den Bereichen elementarer Kreis- und Dreiecksgeometrie sowie der Algebra.

- Beim *Sammeln, Sichern und Systematisieren* müssen Schülerinnen und Schüler auf Erfahrungen und erworbene Kompetenzen aus vorangegangenen Erkundungen zurückgreifen. Nach verschiedenen Möglichkeiten Wahrscheinlichkeiten zu prognostizieren – z. B. aufgrund theoretischer (Symmetrie-)Überlegungen bei Würfeln oder Münzen, aufgrund von Experimenten und in ihnen gewonnenen relativen Häufigkeiten oder aufgrund der subjektiven Einschätzung von Chancen und Risiken bei einmaligen Ereignissen – können Schülerinnen und Schüler selbst die gemeinsamen Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten „extrahieren" (vgl. BÜCHTER & LEUDERS 2005, Kap. 4.2). Neben den inhaltsbezogenen Kompetenzen müssen sie dabei über die Fähigkeit zur Strukturierung und Abstraktion verfügen.

- Beim *Üben und Wiederholen* werden vorhandene Kompetenzen angewandt und vertieft. Insbesondere beim intelligenten Üben (vgl. LEUDERS 2005) können Schülerinnen und Schüler neben der „Einübung" von Fertigkeiten neue Zusammenhänge entdecken.

- Bei *Anwendungsaufgaben* wie den Fermi-Aufgaben in Abschnitt 2 dieses Beitrags ist die Möglichkeit zum Erleben eigener Kompetenzen offensichtlich. Anwendungsaufgaben können aber auch immer wieder Anlässe sein, das eigene mathematische Inventar auszuweiten und im Anschluss via Reflektion den Zuwachs von Kompetenzen erfahrbar zu machen.

- In *Leistungsüberprüfungen* werden häufig gleichermaßen Erfolgserlebnisse wie Scheiternserfahrungen gemacht. Sie sollten möglichst so gestaltet werden, dass eine kompetenzorientierte Sichtweise überwiegt und Schülerinnen und Schüler immer auch erfahren, was sie schon können (vgl. BÜCHTER 2006b)

- Bei der *Selbstdiagnose* (vgl. BÜCHTER & LEUDERS 2005, Kap. 5.3) kann es gerade als Prinzip verstanden werden, dass Schülerinnen und Schüler über Aufgaben und darauf bezogene Selbsteinschätzungsinstrumente ihre Kompetenzen und Kompetenzzuwächse erfahren und reflektieren.

Literatur

BECKER J. P. & SHIMADA, S. (1997). *The Open-ended Approach. A new proposal for teaching mathematics.* Reston, VA: NCTM.

BLK (1997). *Gutachten zur Vorbereitung des Programms „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts". Materialien zur Bildungsplanung und zur Forschungsförderung, Heft 60.* Bonn: Bund-Länder-Kommission für Bildungsplanung und Forschungsförderung.

http://sinus-transfer.uni-bayreuth.de/fileadmin/MaterialienBT/heft60.pdf

BONSEN, M., BÜCHTER, A. & OPHUYSEN, S. VAN (2004). Im Fokus: Leistung. Zentrale Aspekte der Schulleistungsforschung und ihre Bedeutung für die Schulentwicklung. In H.G. HOLTAPPELS, K. KLEMM, H. PFEIFFER, H.-G. ROLFF & R. SCHULZ-ZANDER (Hrsg.), *Jahrbuch der Schulentwicklung. Band 13. Daten, Beispiele und Perspektiven* (S. 187-223). Weinheim/München: Juventa.

BÜCHTER, A. (2005). Ein Spiel mit merkwürdigen Würfeln. *Praxis der Mathematik in der Schule, 47 (4)*, S. 45-46.

BÜCHTER, A. (2006a). Daten und Zufall entdecken – Sinnstiftende Zugänge zur Stochastik. *mathematik lehren, Heft138.* (erscheint im Oktober 2006)

BÜCHTER, A. (2006b). *Verstehensorientierte Aufgaben als Kern einer neuen Kultur der Leistungsüberprüfung.* SINUS-Transfer: Erläuterung zu Modul 10.

http://www.sinus-transfer.de

BÜCHTER, A. & LEUDERS, T. (2005). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern – Leistung überprüfen.* Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.

BÜCHTER, A. & LEUDERS, T. (2006). Ein Aufgabenmodell für die Praxis – Für die Einschätzung, Auswahl und Entwicklung von Mathematikaufgaben. *Praxis der Naturwissenschaften - Chemie in der Schule, 55 (8).* (erscheint im November 2006)

BÜCHTER, A. & MÜLLER, J. H. (2006). Wer gewinnt beim Murmelspiel? Lage-Kennwerte (als normative Modelle) selbst entwickeln. *mathematik lehren, Heft138.* (erscheint im Oktober 2006)

FREUDENTHAL, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe.* 2 Bände. Stuttgart: Klett.

FREUDENTHAL, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

HARMS, U. & BÜNDER, W. (1999). *BLK- Programmförderung: „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts“. Erläuterung zu Modul 5: Zuwachs von Kompetenz erfahrbar machen: Kumulatives Lernen.* Kiel: Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften.

http://sinus-transfer.uni-bayreuth.de/index.php?id=1262

HEFENDEHL-HEBEKER, L. (2003). Didaktik der Mathematik als Wissenschaft - Aufgaben, Chancen, Profile. *Jahresbericht der DMV, 105 (1)*, S. 3-29.

HUßMANN, S. (2002). *Konstruktivistisches Lernen an Intentionalen Problemen – Mathematik unterrichten in einem offenen Lernarrangement.* Hildesheim: Franzbecker.

KMK (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 04.12.2003*. Bonn: Ständige Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland.

http://www.kmk.org/schul/Bildungsstandards/Mathematik_MSA_BS_04-12-2003.pdf

KMK (2005). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004*. Bonn: Ständige Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland.

http://www.kmk.org/schul/Bildungsstandards/Mathematik_MSA_BS_04-12-2003.pdf

LEUDERS, TIMO (2005). Intelligentes Üben selbst gestalten! - Erfahrungen aus dem Mathematikunterricht. *PÄDAGOGIK, 57 (11),* S. 29-32.

MÜLLER, J. H. (2006). Kreis und Reis – Flächenanteile experimentell bestimmen. *mathematik lehren, Heft 138.* (erscheint im Oktober 2006)

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. (2003). Die Geschichte der „Realistic Mathematics Education“ anhand von Aufgaben erläutert. In S. RUWISCH & A. PETER-KOOP (Hrsg.), *Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule* (S. 25-39). Offenburg: Mildenberger Verlag.

WINTER, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der GDM, Heft 61,* S. 37-46.

Autor

ANDREAS BÜCHTER

Landesinstitut für Schule/Qualitätsagentur

Paradieser Weg 64

59494 Soest

andreas.buechter@mail.lfs.nrw.de